Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 2013/14
Dozentin: Dr. G. Penn-Karras
Assistentin: Dr. C. Papenfuss

Februar – Klausur
Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen, sowie die Laplace-Tabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen.

Die Lösung ist in **Reinschrift** abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R

4	5	6	Σ_V

Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Erraten Sie eine konstante Lösung als Partikulärlösung.

2. Aufgabe 10 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit der Methode der Laplace-Transformation:

$$\begin{aligned} x'(t) &= -3x(t) - y(t), \quad & x(0) = 1 \\ y'(t) &= x(t) - y(t), \quad & y(0) = 1. \end{aligned}$$

3. Aufgabe 10 Punkte

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gestalt $u(x,t) = X(x)T(t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$tu_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \; t > 1 \; ,$$

die die Randbedingungen

$$u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

erfüllen. Beschränken Sie sich dabei auf Lösungen, die in x periodisch und nicht konstant sind.

b) Lösen Sie das Rand-Anfangswert-Problem

$$\begin{aligned} tu_t &= u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \; t > 1 \; , \\ u_x(0,t) &= u(\pi,t) = 0 \\ u(x,1) &= 7\cos\left(\tfrac{3x}{2}\right) \; . \end{aligned}$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 12 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und geben Sie jeweils eine kurze Begründung an.

Für jede richtige Antwort mit richtiger Begründung gibt es zwei Punkte. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte

a) Es gibt eine lineare homogene Differentialgleichung 3.Ordnung mit konstanten, reellen Koeffizienten, die $e^t \sin t$ als Lösung hat.

b) Es gibt eine lineare homogene Differentialgleichung 3.Ordnung mit konstanten, reellen Koeffizienten, die $t^2 e^t \sin t$ als Lösung hat.

c) Das Anfangswertproblem

$$y' = \tan(x^2 y^2)\ , \quad y(0) = 0$$

hat genau eine Lösung.

d) Die Fourier-Transformierte einer geraden Funktion ist eine gerade Funktion.

e) Es seien

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} -2\sin t \\ 2\cos t \end{pmatrix}$$

Lösungen eines 2-dimensionalen homogenen linearen DGL-Systems.

Dann laesst sich jede Lösung $\vec{x}(t)$ dieses Systems in der Form

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1(t) + c_2\vec{x}_2(t)$$

mit passenden Konstanten c_1 und c_2 schreiben.

f) Ist $\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s+1}\mathcal{L}[g](s)$, dann ist $f(t) = e^{-t}g(t)$.

5. Aufgabe 10 Punkte

Ein kausales LTI-System antwortet auf die Eingangsfunktion $e(t) = 1$ mit dem Signal $y(t) = t + \sin t$ (wobei $t \geq 0$). Bestimmen Sie

a) die Übertragungsfunktion,

b) die Impulsantwort,

c) die Antwort des Systems auf die Eingangsfunktion $e(t) = t$.

bitte wenden!

6. Aufgabe 8 Punkte

Die stetige Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ hat die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\omega-\tau|}}{1+\tau^2} d\tau$$

Berechnen Sie die Funktion f explizit.

Hinweis: Wenden Sie die Fouriertransformation auf die Gleichung an und verwenden Sie den Faltungssatz. Es gilt:

$$\mathcal{F}[e^{-|x|}](\alpha) = \frac{2}{\alpha^2+1} \ , \quad \mathcal{F}[\frac{1}{1+x^2}](\alpha) = \pi e^{-|\alpha|} \ .$$