Rechenteil

1. Aufgabe 10 Punkte

Lösung der homogenen Gleichung

Eigenwerte der Koeffizientenmatrix bestimmen:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(-2-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 1 \quad \lambda_3 = -2$$

Eigenvektoren zu $\lambda_{1,2} = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hauptvektor zu $\lambda_{1,2} = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}_3 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung der homogenen Gleichung:

$$\vec{x}_h(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Partikuläre Lösung für die inhomogene Gleichung

Ansatz $\vec{x}_p(t) = (A, B, C)^T$in die Differentialgleichung einsetzen liefert

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + 3B \\ B \\ A - 2C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung

$$\vec{x}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} 1+3t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

2. Aufgabe **10 Punkte**

Laplacetransformieren der beiden DGl's ergibt

$sX(s) - x(0) = sX(s) - 1 = -3X(s) - Y(s) \Leftrightarrow (s+3)X(s) + Y(s) = 1$

$sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 = X(s) - Y(s) \Leftrightarrow -X(s) + (s+1)Y(s) = 1$

Auflösen des Gleichungssystems ergibt

$$X(s) = \frac{s}{s^2+4s+4} = \frac{s+2-2}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} - \frac{2}{(2+2)^2},$$

$$Y(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+4} = \frac{s+2+2}{(s+2)^2} = \frac{1}{s+2} + \frac{2}{(2+2)^2},$$

Rücktransformation liefert

$x(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t}$ und $y(t) = e^{-2t} + 2te^{-2t}$.

3. Aufgabe **10 Punkte**

(a) Ansatz: $u(x,t) = X(x)T(t)$

$\Rightarrow \quad tX(x)T'(t) = X''(x)T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{tT'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$

Randwertproblem für X: $X''(x) = \lambda X(x),\ X'(0) = X(\pi) = 0.$

Nicht-konstante periodische Lösungen der DGL gibt es nur für $\lambda = -\omega^2 < 0$:

$X(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x \quad ,$

$X'(x) = -c_1\omega \sin \omega x + c_2\omega \cos \omega x \ \Rightarrow\ X'(0) = c_2\omega = 0 \ \Rightarrow\ c_2 = 0,$

$X(\pi) = c_1 \cos(\omega\pi) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$ oder $\omega\pi = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{N}_0.$

Nichttriviale Lösungen $X_n(x) = c_n \cos((n+\frac{1}{2})x)$

gibt es also für $\lambda_n = -(n+\frac{1}{2})^2,\ n \in \mathbb{N}_0.$

DGL für T: $T_n'(t) = \frac{\lambda_n}{t} T_n(t) \Rightarrow T_n(t) = \tilde{c}_n t^{\lambda_n}.$

Lösungen des RWP:

$u_n(x,t) = \hat{c}_n t^{-(n+1/2)^2} \cos((n+\frac{1}{2})x), \quad n \in \mathbb{N}_0,\ \hat{c}_n \in \mathbb{R}.$

(b) $u(x,t) = 7t^{-9/4} \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$ mit $n = 1,\ \hat{c}_1 = 7$, erfüllt die Anfangbedingung .

Verstaendnisteil

4. Aufgabe 12 Punkte

(a) Wahr.

Daraus, dass $e^t \sin t$ Lösung ist folgt, dass $1 \pm i$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind. Z.B. kann $P(\lambda) = \lambda(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda$ sein. Die zugehörige DGl lautet

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0 \qquad .$$

(b) Falsch.

Es müssten $1 \pm i$ jeweils dreifache Nullstellen des charakteristischen Polynoms sein. Dafür müsste die DGl mindestens von 6. Ordnung sein.

(c) Wahr.

Die rechte Seite $F(x, y) = \tan(x^2 y^2)$ ist in einer Umgebung von $(0, 0)$ stetig differenzierbar. Damit sind die Voraussetzungen des EES erfüllt, und es gibt genau eine Lösung des AWPs.

(d) Wahr.

Wenn f gerade ist gilt

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(-\bar{t})e^{i\omega\bar{t}}d\bar{t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{t})e^{i\omega\bar{t}}d\bar{t} = \mathcal{F}[f(t)](-\omega).$$

(e) Falsch.

Diese zwei Lösungen sind linear abhängig: $\vec{x}_2 = -2\vec{x}_1$.

(f) Falsch.

Wähle z.B. $g(t) = e^{-t}$.

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s+1}\mathcal{L}[g(t)](s) = \frac{1}{(s+1)^2} \quad \Rightarrow \quad f(t) = te^{-t} \neq e^{-2t} = e^{-t}g(t).$$

5. Aufgabe **10 Punkte**

(a) Die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ erfüllen die Beziehungen

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * 1 \qquad &\Rightarrow \quad Y(s) = H(s)\mathcal{L}[1](s) = H(s)\frac{1}{s} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{1+s^2} + \frac{1}{s^2} = H(s)\frac{1}{s} \quad &\Rightarrow \quad H(s) = \frac{s}{1+s^2} + \frac{1}{s} \ . \end{aligned}$$

(b) Die Impulsantwort erhält man durch Laplace-Rücktransformation

$$h(t) = \cos t + 1.$$

(c)

$$e(t) = t \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = H(s)\frac{1}{s^2} = (\frac{s}{1+s^2} + \frac{1}{s})\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s(1+s^2)} + \frac{1}{s^3}$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{s(1+s^2)} = \frac{A}{s} + \frac{B+Cs}{1+s^2} \quad \Rightarrow \quad A = 1\ , \quad B = 0 \quad C = -1$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{1+s^2} + \frac{1}{s^3}$$

Die gesuchte Antwortfunktion ist die Rücktransformierte

$$y(t) = 1 - \cos t + \frac{1}{2}t^2 \ .$$

6. Aufgabe **8 Punkte**

Das angegebene Integral ist eine Faltung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-|\omega-\tau|}}{1+\tau^2} d\tau = \left(\frac{1}{1+\bullet^2} * e^{-|\bullet|}\right)(\omega) \ .$$

Anwenden der Fouriertrafo und des Faltungssatzes liefert:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{F}[f](\omega)](t) = 2\pi f(-t) &= \mathcal{F}[\left(\frac{1}{1+\bullet^2} * e^{-|\bullet|}\right)(\omega)](t) \\ &= \mathcal{F}[\frac{1}{1+\omega^2}](t)\mathcal{F}[e^{-|\omega|}](t) = \pi e^{-|t|}\frac{2}{1+t^2} \qquad . \end{aligned}$$

Die gesuchte Funktion ist also

$$f(t) = e^{-|t|}\frac{1}{1+t^2} \ .$$