Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 2014
Dozentin: Dr. G. Penn-Karras
Assistentin: Dr. C. Papenfuss

Juli – Klausur Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen, sowie die Laplace-Tabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

5	6	7	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} \ .$$

2. Aufgabe 11 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit der Methode der Laplace-Transformation:

$$y'' - y = u_2(t)e^{-t} \ , \quad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = -1 \ .$$

$u_2(t)$ bezeichnet die Heavysidefunktion mit Sprung an der Stelle 2.

3. Aufgabe 6 Punkte

Bestimmen Sie alle Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$u_t = \sin(t)u_x \ ,$$

die von der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ sind.

4. Aufgabe 4 Punkte

Berechnen Sie die Fourier-Transformierte

$$\mathcal{F}\left[\frac{5}{9t^2+24t+17}\right](\omega) \ .$$

Hierzu können Sie benutzen

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|}$$

$$\mathcal{F}[f(\frac{t}{a})](\omega) = |a|\mathcal{F}[f(t)](a\omega)$$

$$\mathcal{F}[f(t-t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0}\mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

Verständnisteil

5. Aufgabe — 12 Punkte

Sei

$$P(\lambda) = (\lambda + 1)^2 \, (\lambda + (1+i))^2 \, (\lambda + (1-i))^2$$

das charakteristische Polynom einer homogenen, linearen Differentialgleichung mit konstanten, reellen Koeffizieten.

a) Geben Sie die allgemeine reelle Lösung der DGl an.

b) Eine zughörige inhomogene DGl habe die rechte Seite

$$b(t) = t^2 + \cos t + 3\left(e^{-t} + \sin t\right) \quad .$$

Geben Sie einen möglichst einfachen Ansatz an, mit dem man eine partikuläre Lösung berechnen könnte. Die Koeffizienten sollen <u>nicht</u> ausgerechnet werden.

6. Aufgabe — 10 Punkte

a) Begründen Sie, warum das Anfangswertproblem

$$y' = e^y - e \cdot \cos(y-1) \;, \qquad y(1) = 1$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Geben Sie diese Lösung an.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = -e^y \cdot e^x \;, \qquad y(0) = \ln 2$$

Geben Sie den maximalen Definitionsbereich der Lösung an.

7. Aufgabe — 8 Punkte

Sei $y : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ Lösung der Gleichung

$$y''(t) + 2y'(t) + \int_0^t y(t-\tau)\cos\tau \, d\tau = \sin t$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$. Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $L[y](s)$ von y. Die Rücktransformation, d.h. die Bestimmung von y selbst ist nicht verlangt.