Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik SS 2014

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure Lösung Klausur Juli

Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Bestimmen der Eigenwerte der Koeffizientenmatrix:

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= -\lambda\left(-\lambda(1-\lambda)+1\right) - 1 + 2\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

mit einer Lösung

$$\lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad P(\lambda) = (\lambda - 1)R(\lambda) \ .$$

mit Polynomdivision

$$R(\lambda) = -\lambda^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = 1 \ , \quad \lambda_3 = -1 \ .$$

Zu $\lambda_3 = -1$ findet man den Eigenvektor $\vec{v_3}$

$$(A - \lambda_3 I)\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Zu $\lambda_1 = 1$ findet man einen Eigenvektor $\vec{v_1}$:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Zum doppelten Eigenwert benötigt man einen Hauptvektor, den man iterativ bestimmen kann:

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_2 = \vec{v}_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

Damit lautet die allgemeine Lösung des DGl-Systems:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t}\left(\vec{v}_2 + t\vec{v}_1\right) + C_3 e^{\lambda_3 t}\vec{v}_3$$

$$= C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

2. Aufgabe 11 Punkte

Laplace-Transformation der DGl ergibt (mit $\mathcal{L}\left[y(t)\right](s) =: Y(s)$)

$$\begin{aligned} y'' - y = u_2(t)e^{-t} \ , \quad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = -1 \\ s^2 Y - s + 1 - Y(s) = e^{-2s}\mathcal{L}[e^{-(t+2)}](s) = e^{-2}\frac{e^{-2s}}{s+1} \\ Y(s)(s^2-1) - s + 1 = e^{-2}\frac{e^{-2s}}{s+1} \\ Y(s)(s+1)(s-1) = s - 1 + e^{-2}\frac{e^{-2s}}{s+1} \\ Y(s) = \frac{1}{s+1} + e^{-2}\frac{e^{-2s}}{(s+1)^2(s-1)} \end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2} \\ \Rightarrow \quad 1 = A(s+1)^2 + B(s-1)(s+1) + C(s-1) \\ s = 1: \quad 1 = 4A \quad \Leftrightarrow A = \frac{1}{4} \\ s = -1: \quad 1 = -2C \quad \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2} \\ s = 0: \quad 1 = A - B - C = \frac{1}{4} - B + \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow B = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(s+1)^2(s-1)} = \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{2(s+1)^2}$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad Y(s) &= \frac{1}{s+1} + e^{-2}e^{-2s}\left(\frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{4(s+1)} - \frac{1}{2(s+1)^2}\right) \\
&= \mathcal{L}[e^{-t}](s) + e^{-2}e^{-2s}\left(\frac{1}{4}\mathcal{L}[e^{t}](s) - \frac{1}{4}\mathcal{L}[e^{-t}](s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}[te^{-t}](s)\right) \\
&= \mathcal{L}[e^{-t} + e^{-2}u_2(t)\left(\frac{1}{4}e^{t-2} - \frac{1}{4}e^{-(t-2)} - \frac{1}{2}(t-2)e^{-(t-2)}\right)](s)
\end{aligned}
$$

Die gesuchte Lösung lautet

$$
y(t) = e^{-t} + e^{-2}u_2(t)\left(\frac{1}{4}e^{t-2} - \frac{1}{4}e^{-(t-2)} - \frac{1}{2}(t-2)e^{-(t-2)}\right)
$$

3. Aufgabe 6 Punkte

Der Ansatz führt auf

$$
X\dot{T} = \sin t X'T
$$

und nach Trennung der Variablen

$$
\frac{\dot{T}}{T\sin t} = \frac{X'}{X} = \lambda \in \mathbb{R} \ .
$$

Damit erhält man zwei gewöhnliche DGl's:

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{T}}{T} &= \lambda \sin t \\
\ln T &= -\lambda \cos t + C \\
T(t) &= \tilde{C}e^{-\lambda \cos t}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\frac{X'}{X} &= \lambda \\
X(x) &= e^{\lambda x} \ .
\end{aligned}
$$

Damit hat man eine Lösung der partiellen DGl:

$$
u(x,t) = \tilde{C}e^{-\lambda \cos t}e^{\lambda x} = \tilde{C}e^{\lambda(x-\cos t)} \ .
$$

4. Aufgabe 4 Punkte

$$
\mathcal{F}\left[\frac{5}{9t^2+24t+17}\right](\omega) \ .
$$

Es ist

$$9t^2 + 24t + 17 = (3t + 4)^2 + 1$$

Mit dem Skalierungssatz folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{5}{9t^2 + 24t + 17}\right](\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{5}{(3t + 4)^2 + 1}\right](\omega) \\ &= \frac{5}{3} \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{(t + 4)^2 + 1}\right]\left(\frac{\omega}{3}\right).\end{aligned}$$

und mit dem Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\frac{5}{3} \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{(t + 4)^2 + 1}\right]\left(\frac{\omega}{3}\right) &= \frac{5}{3} \cdot \mathrm{e}^{4i\frac{\omega}{3}} \cdot \mathcal{F}\left[\frac{1}{t^2 + 1}\right]\left(\frac{\omega}{3}\right) \\ &= \frac{5}{3} \cdot \pi \cdot \mathrm{e}^{4i\frac{\omega}{3} - \frac{|\omega|}{3}} .\end{aligned}$$

Verständnisteil

5. Aufgabe 12 Punkte

(a) Aus

$$P(\lambda) = (\lambda+1)^2 \left(\lambda+(1+i)\right)^2 \left(\lambda+(1-i)\right)^2$$

liest man die Nullstellen des charakteristischen Polynoms ab:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1\ , \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -1-i\ , \quad \lambda_5 = \lambda_6 = -1+i$$

Die allgemeine Lösung der DGl ist:

$$y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t} + e^{-t}\left(C_3 \cos t + C_4 \sin t\right) + e^{-t} t \left(C_5 \cos t + C_6 \sin t\right)\ .$$

(b) Für die partikuläre Lösung termweise Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\begin{aligned} t^2 \quad &\to At^2 + Bt + C\ , \quad \text{keine Resonanz} \\ \cos t \quad &\to D\sin t + E\cos t\ , \quad \text{keine Resonanz} \\ 3e^{-t} \quad &\to Fe^{-t}\ , \quad \text{Resonanz mit doppelter Nullstelle} \quad \Rightarrow \\ &\qquad Ft^2e^{-t} \\ 3\sin t \quad &\to G\sin t + H\cos t\ , \quad \text{keine Resonanz} \quad \Rightarrow \\ &G\sin t + H\cos t \text{kann man zusammenfassen mit den Termen oben} \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich als partikuläre Lösung:

$$y_p(t) = At^2 + Bt + C + D\sin t + E\cos t + Ft^2e^{-t}\ .$$

6. Aufgabe 10 Punkte

(a) Die 'rechte Seite' der DGl

$$F(x,y) = e^y - e\cdot\cos(y-1)$$

ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= e^y + e\cdot\sin(y-1)\ . \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen des EES erfüllt und das AWP eindeutig lösbar. Die Lösung des AWP's ist $y(x) = 1$, denn y erfüllt die DGL:

$$y'(x) \equiv 0\ , \quad e^1 - e\cdot\cos(1-1) = 0$$

und die Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

(b) Die DGl ist separabel. Trennung der Variablen und Integration liefert:

$$\begin{aligned} -y'e^{-y} &= e^x \\ e^{-y} &= e^x + C \\ \ln e^{-y} &= \ln(e^x + C) \\ y(x) &= -\ln(e^x + C) \end{aligned}$$

Auswerten der Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} y(0) = \ln 2 &= -\ln(e^0 + C) \\ C &= -\frac{1}{2} \\ y(x) &= -\ln(e^x - \frac{1}{2}) \ . \end{aligned}$$

Es muss $e^x - \frac{1}{2} > 0$ sein:

$$\begin{aligned} e^x &> \frac{1}{2} \\ x > \ln\frac{1}{2} &= -\ln 2 \end{aligned}$$

Der maximale Defiitionsbereich ist also $]-\ln 2, \infty[$.

7. Aufgabe 8 Punkte

$Y(s) = L[y](s)$ bezeichne die Laplace-Transformierte von $y(t)$. Laplace-Transformation der Gleichung und Anwendung des Faltungssatzes Liefert:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - y'(0) - sy(0) + 2\,(sY(s) - y(0)) + Y(s)\frac{s}{1+s^2} \\ = \frac{1}{1+s^2} \ , \end{aligned}$$

bzw. nach Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$s^2Y(s) - 4 - 2s + 2\,(sY(s) - 2) + Y(s)\frac{s}{1+s^2} = \frac{1}{1+s^2} \ .$$

$Y(s)$ erfüllt die Gleichung:

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{1+s^2} + 2s + 8}{s^2 + 2s + \frac{s}{1+s^2}} = \frac{1 + (2s+8)(1+s^2)}{(s^2+2s)(1+s^2) + s} \ .$$