Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik SS 2014

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure
Lösung Klausur Oktober

Rechenteil

1. Aufgabe 8 Punkte

Lösung der homogenen DGl $y_h'' + y_h' - 2y_h = 0$: mit dem charakteristischen Polynom

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$
$$\lambda_1 = 1 \ , \quad \lambda_2 = -2 \ ,$$
$$y_h(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} \ .$$

Eine partikuläre Lösung findet man entweder mit dem Ansatz vom Typ rechten Seite oder durch Variation der Konstanten:

(a) Ansatz vom Typ der rechten Seite:
Mit $b(t) = 3e^t$ liegt Resonanz vor. Der Ansatz lautet daher

$$y_p(t) = Ate^t \ .$$

Eingesetzt in die DGl ergibt sich

$$\begin{aligned} y_p(t)' = Ae^t + Ate^t \ , \quad y_p(t)'' = 2Ae^t + Ate^t \\ \Rightarrow \quad 2Ae^t + Ate^t + Ae^t + Ate^t - 2Ate^t = 3Ae^t = 3e^t \\ \Rightarrow \quad A = 1 \ , \quad y_p(t) = te^t \ . \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + te^t \ .$$

(b) Variation der Konstanten:
Ansatz für die partikuläre Lösung

$$y_p(t) = C_1(t)e^t + C_2(t)e^{-2t} \ .$$

führt auf

$$W(t)\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

mit der Wronskimatrix $W(t) \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ e^t & -2e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^t \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} \\ 0 & -3e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3e^t \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Zeile folgt:

$$C_2' = -e^{3t} \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\frac{1}{3}e^{3t} \ .$$

Eingesetzt in die 1. Zeile folgt

$$e^t C_1' + e^{-2t} C_2' = 0$$
$$C_1' = 1 \quad \Rightarrow \quad C_1 = t \ .$$

Damit ist die partikuläre Lösung

$$y_p(t) = te^t - \frac{1}{3}e^t$$

und die allgemeine Lösung wie oben.

2. Aufgabe 10 Punkte

Laplace-Transformation der DGl ergibt (mit $\mathcal{L}\left[y(t)\right](s) =: Y(s)$)

$$\begin{aligned}
y'' + 3y' - 4y &= 50u_1(t)e^{t-1} \ , \quad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = -4 \\
s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) - 4Y(s) &= 50e^{-s}\frac{1}{s-1} \\
s^2Y(s) - s + 4 + 3sY(s) - 3 - 4Y(s) &= 50e^{-s}\frac{1}{s-1} \\
Y(s)(s^2 + 3s - 4) - s + 1 &= 50e^{-s}\frac{1}{s-1} \\
Y(s)(s-1)(s+4) &= s - 1 + 50e^{-s}\frac{1}{s-1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s+4} + 50e^{-s}\frac{1}{(s-1)^2(s+4)}
\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{50}{(s-1)^2(s+4)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s+4)} \\
50 &= A(s-1)(s+4) + B(s+4) + C(s-1)^2 \\
s=-4: \quad 50 &= 25C \quad \Leftrightarrow C = 2 \\
s=1: \quad 50 &= 5B \quad \Leftrightarrow B = 10 \\
s=0: \quad 50 &= -4A + 4B + C = -4A + 40 + 2 \quad \Leftrightarrow A = -2 \\
\frac{50}{(s-1)^2(s+4)} &= -\frac{2}{s-1} + \frac{10}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s+4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad Y(s) &= \frac{1}{s+4} + e^{-s}\left(-\frac{2}{s-1} + \frac{10}{(s-1)^2} + \frac{2}{(s+4)}\right) \\
&= \mathcal{L}[e^{-4t}](s) + \mathcal{L}[-2e^t + 10te^t + 2e^{-4t}](s)e^{-s} \\
&= \mathcal{L}[e^{-4t}](s) + \mathcal{L}[10te^t - 2e^t + 2e^{-4t}](s)e^{-s} \\
&= \mathcal{L}[e^{-4t} + u_1(t)\left(10(t-1)e^{t-1} - 2e^{t-1} + 2e^{-4(t-1)}\right)](s)
\end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung lautet

$$y(t) = e^{-4t} + u_1(t)\left(10(t-1)e^{t-1} - 2e^{t-1} + 2e^{-4(t-1)}\right)$$

3. Aufgabe — 12 Punkte

(a) Der Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ liefert

$$t^2T'(t)X(x) + T(t)X''(x) = 0,$$

also

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{t^2T'(t)}{T(t)} = \lambda,$$

mit einer Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir lösen zuerst die DGL in $T(t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{t^2T'(t)}{T(t)} &= \lambda \\
\int \frac{T'(t)}{T(t)}dt &= \int \frac{\lambda}{t^2}dt \\
\ln T(t) &= -\frac{\lambda}{t} + C \\
T(t) &= \bar{C}e^{-\frac{\lambda}{t}}
\end{aligned}$$

Wir lösen die DGL in $X(x)$:

$$X''(x) = -\lambda X(x)$$
$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$\lambda \leq 0$ liefert keine periodischen, nicht-konstanten Lösungen.

$\lambda > 0$:
Es ergeben sich die Lösungen

$$X(x) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

und

$$T(t) = \bar{C}e^{-\frac{\lambda}{t}}$$

Die Lösung der PDGL lautet

$$u(x,t) = \left(A\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)\right)\left(\bar{C}e^{-\frac{\lambda}{t}}\right) \ .$$

(b)

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad X(0) = X(2\pi) = 0 \ .$$

$$X(0) = A\cos\left(\sqrt{\lambda}0\right) + B\sin\left(\sqrt{\lambda}0\right) = A = 0$$
$$X(2\pi) = B\sin\left(\sqrt{\lambda}2\pi\right) = 0$$

$B \neq 0$, da sonst nur die triviale Lösung bleibt. Die Nullstellen des Sinus sind $n\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Es ist

$$\sqrt{\lambda}2\pi = n\pi, \qquad n \in \mathbb{N} \ .$$

λ ist also einer der Werte

$$\lambda_n = \left(\frac{n}{2}\right)^2 \qquad (n \in \mathbb{N}). \quad \Rightarrow$$
$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right)$$

Für ein festes n setzen wir λ_n für λ in die Gleichung für $T(t)$ ein

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{n^2}{4t}} \ .$$

und erhalten als Lösungen der PDGL

$$u_n(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) C_n e^{-\frac{n^2}{4t}} \ .$$

Daraus die allgemeine Lösung mit Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) e^{-\frac{n^2}{4t}} \ .$$

(c) Auswerten der Anfangsbedingung

$$u(x,1) = 2\sin(x) + \sin(3x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n}{2}x\right) e^{-\frac{n^2}{4}}$$

Koeffizientenvergleich:

$$n = 2 : D_2 = 2e \ ,$$
$$n = 6 : D_6 = e^9 \ .$$

Die Lösung $u(x,t)$ des RAWP lautet

$$u(x,t) = 2e\sin(x)\, e^{-\frac{1}{t}} + e^9 \sin(3x)\, e^{-\frac{9}{t}} \ .$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 7 Punkte

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} \ , \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind

$$\lambda_1 = 1 = \lambda_2 \ , \quad \lambda_3 = -5$$

Eigenvektor zu $\lambda_3 = -5$:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}_3 = \vec{0}$$

$$\vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zu $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \vec{x}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Hauptvektor $\vec{x}_2$ zum doppelten Eigenwert kann iterativ bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
(A-\lambda_1 I)\vec{x}_2 &= \vec{x}_1 \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}\vec{x}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow \quad \vec{x}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Die allgemeine Lösung lautet:

$$
x(t) = c_1 e^{-5t}\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 36 \end{pmatrix} + c_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) .
$$

5. Aufgabe **12 Punkte**

(a) Wahr
Die Lösung $y(x)$ muss differenzierbar sein und $y'(x) = 1 + y(x)^6 > 0$. Damit sind die Bedingungen für Monotonie erfüllt.

(b) Falsch
Die Lösung ist nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

$$
\begin{aligned}
y' = y^2 \ , &\quad y(0) = 1 \\
\int \frac{y'}{y^2}dx &= \int 1dx \\
-\frac{1}{y} &= x + C \\
y(x) &= -\frac{1}{x+C} \\
y(0) = 1 &= -\frac{1}{C} \\
C &= -1 \\
y(x) &= -\frac{1}{x-1}
\end{aligned}
$$

ist nur definiert für $x < 1$.

(c) Falsch
Die homogene DGl hat die Lösung

$$
\begin{aligned}
y_h''(x) + y_h'(x) &= 0 \\
\lambda^2 + \lambda &= 0 \\
\lambda_1 = 0 \ , \quad \lambda_2 = -1 \ y_{1h} = e^{-x} \ , \quad y_{2h} &= 1 \ .
\end{aligned}
$$

Mit $b(x) = x^2 e^{-x}$ liegt Resonanz mit $\lambda = -1$ vor. Damit lautet der Ansatz

$$y_p(x) = e^{-x} x(Ax^2 + Bx + C) \ .$$

(d) Wahr
Sei $f(x)$ ungerade.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)\right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Bigg(\underbrace{f(t)\cos(\omega t)}_{ungerade} - i \underbrace{f(t)\sin(\omega t)}_{gerade} \Bigg) dt \\
&= -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \\
&= -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-\sin(-\omega t)) dt = -\mathcal{F}[f(t)](-\omega)
\end{aligned}$$

6. Aufgabe 11 Punkte

(a)

$$\begin{aligned}
f(t) &= \begin{cases} 1, & 0 < t < 2; \\ t^2, & 2 \le t \end{cases} \\
&= 1 + u_2(t)(t^2 - 1) \\
\mathcal{L}[f(t)](s) &= \mathcal{L}[1 + u_2(t)(t^2 - 1)](s) \\
&= \frac{1}{s} + e^{-2s} \left(\mathcal{L}[(t+2)^2 - 1](s) \right) \\
&= \frac{1}{s} + e^{-2s} \left(\mathcal{L}[t^2 + 4t + 3](s) \right) \\
&= \frac{1}{s} + e^{-2s} \left(\frac{2}{s^3} + 4\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s} \right) \ .
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
G(s) = \mathcal{L}[g(t)](s) = \mathcal{L}[\int_0^t \tau f(t-\tau) d\tau](s) = \mathcal{L}[t * f(t)](s) = \\
= \mathcal{L}[t](s) \cdot \mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{s^2} F(s) \Leftrightarrow \quad s^2 G(s) = F(s) \\
\mathcal{L}[g''(t)](s) + g'(0) + s g(0) = F(s) \ .
\end{aligned}$$

Mit $g(0) = 0$ und $g'(0) = 0$ folgt die Behauptung.
Es ist

$$g(0) = \int_0^0 \tau f(-\tau) d\tau = 0$$

und

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[g'(t)](s) = sG(s) - g(0) = sG(s) = s\frac{1}{s^2}F(s) = \frac{1}{s}F(s) \\
= \mathcal{L}[1](s)\mathcal{L}[f(t)](s) = \mathcal{L}[1 * f(t)](s) = \mathcal{L}[\int_0^t 1f(t-\tau)d\tau](s) \\
g'(t) = \int_0^t 1f(t-\tau)d\tau \\
g'(0) = \int_0^0 1f(-\tau)d\tau = 0 \ .
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.