Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 2014/2015
Dozentin: Dr. G. Penn-Karras
Assistentin: Dr. C. Papenfuss

Februar – Klausur Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....
Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen, sowie die Laplace-Tabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x} \ .$$

2. Aufgabe 12 Punkte

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit der Methode der Laplace-Transformation:

$$y''' + 2y'' - 7y' + 4y = 50\delta_1(t) \ , \quad y(0) = 0 \ , \quad y'(0) = 1 \ , \quad y''(0) = 2 \ .$$

Hinweis: $s^3 + 2s^2 - 7s + 4 = (s-1)^2(s+4)$ darf benutzt werden.

3. Aufgabe 9 Punkte

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gestalt $u(x,t) = X(x)T(t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$u_x + u + u_t = 0, \quad t \geq 0 \ ,$$

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u_x + u + u_t = 0, \quad t \geq 0 \ , \quad u(x,0) = 3e^{2x} \ .$$

Verständnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

$$y(t) = t^2 + \cos t$$

ist eine Lösung einer linearen, homogenen Differentialgleichung mit konstanten, reellen Koeffizienten.

a) Bestimmen Sie diese DGl. Wählen Sie den Grad so niedrig wie möglich.

b) Geben Sie ein Fundamentalsystem zu dieser DGl an.

c) Geben Sie einen Ansatz für eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit der Inhomogenität

$$b(t) = t \sin t$$

an. Wählen Sie den Ansatz so einfach wie möglich. Die partikuläre Lösung soll nicht ausgerechnet werden.

5. Aufgabe 10 Punkte

Ein kausales LTI-System antwortet auf die Eingangsfunktion $e_1(t) = t$ mit dem Signal $y(t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3$ (wobei $t \geq 0$). Bestimmen Sie

a) die Übertragungsfunktion,

b) die Impulsantwort,

c) die Antwort des Systems auf die Eingangsfunktion $e_2(t) = t^2$.

6. Aufgabe 10 Punkte

Sei $u : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ in x Fourier-transformierbar und eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u_t = u_{xx} \ , \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \ .$$

Es gelte

$$u(x, 0) = e^{-\frac{x^2}{2}} \ .$$

Bestimmen Sie damit die Fourier-Transformierte von u **bzgl. x** gegeben durch

$$U(\omega, t) = \mathcal{F}[u(x, t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx.$$

Es soll nur die Fourier-Transformierte berechnet werden, die Rücktransformation ist nicht verlangt.

Hinweis: Es ist

$$\mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{2}}](\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$