Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure
Lösung Klausur Februar

Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Bestimmen der Eigenwerte der Koeffizientenmatrix:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) + 2(1+\lambda) = (1+\lambda)(\lambda-\lambda^2+2) = 0$$

mit einer Lösung

$$\lambda_1 = -1\ .$$

Weitere Nullstellen findet man aus

$$\lambda^2-\lambda-2=0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2}$$
$$\lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1\ .$$

Zu $\lambda_2 = 2$ findet man den Eigenvektor $\vec{v_2}$

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ .$$

Zu $\lambda_1 = \lambda_3 = -1$ findet man zwei linear unabhängige Eigenvektoren $\vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$:

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v}_{1/3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_{1/3} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ,$$
$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\ .$$

Damit lautet die allgemeine Lösung des DGl-Systems:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2} + C_3 e^{\lambda_3 t}\vec{v_3} \\ &= C_1 e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + C_2 e^{2t}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + C_3 e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} .\end{aligned}$$

2. Aufgabe 12 Punkte

$$y''' + 2y'' - 7y' + 4y = 50\delta_1(t)\ , \quad y(0) = 0\ , \quad y'(0) = 1\ , \quad y''(0) = 2$$

Laplace-Transformation der DGl ergibt (mit $\mathcal{L}\left[y(t)\right](s) =: Y(s)$)

$$\begin{aligned}s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) + 2\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right)& \\ -7\left(sY(s) - y(0)\right) + 4Y(s) &= \mathcal{L}[50\delta_1(t)](s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s^3Y(s) - s - 2 + 2\left(s^2Y(s) - 1\right) - 7sY(s) + 4Y(s) &= \mathcal{L}[50\delta_1(t)](s) \\ Y(s)(s^3 + 2s^2 - 7s + 4) - s - 2 - 2 &= 50e^{-s} \\ Y(s) = \frac{s+4}{s^3 + 2s^2 - 7s + 4} &+ \frac{50e^{-s}}{s^3 + 2s^2 - 7s + 4} .\end{aligned}$$

Mit dem Hinweis ist

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{s+4}{(s-1)^2(s+4)} + \frac{50e^{-s}}{(s-1)^2(s+4)} \\ &= \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{50e^{-s}}{(s-1)^2(s+4)}\end{aligned}$$

Für den zweiten Bruch benötigt man eine Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}\frac{50}{(s+4)(s-1)^2} &= \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} \\ \Rightarrow \quad 50 &= A(s-1)^2 + B(s-1)(s+4) + C(s+4) \\ s = -4: \quad 50 &= 25A \quad \Leftrightarrow A = 2 \\ s = 1: \quad 50 &= 5C \quad \Leftrightarrow C = 10 \\ s = 0: \quad 50 = A - 4B + 4C &= 2 - 4B + 40 \quad \Leftrightarrow B = -2 \\ \frac{50}{(s+4)(s-1)^2} &= \frac{2}{s+4} - \frac{2}{s-1} + \frac{10}{(s-1)^2} .\end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} + e^{-s}\left(\frac{2}{s+4} - \frac{2}{s-1} + \frac{10}{(s-1)^2}\right) \\ &= \mathcal{L}[e^t t](s) + e^{-s}\left(\mathcal{L}[2e^{-4t} - 2e^t + 10te^t](s)\right) \\ &= \mathcal{L}[e^t t](s) + \mathcal{L}[u_1(t)\left(2e^{-4(t-1)} - 2e^{(t-1)} + 10(t-1)e^{(t-1)}\right)](s)\end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung lautet

$$y(t) = e^t t + u_1(t)\left(2e^{-4(t-1)} - 2e^{(t-1)} + 10(t-1)e^{(t-1)}\right)$$

3. Aufgabe 9 Punkte

a) Ansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ einsetzen in die DGl liefert:

$$\begin{aligned} X(x)T'(t) + T(t)X(x) + X'(x)T(t) &= 0 \\ \frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = -\frac{X'(x)}{X(x)} &= \lambda \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

Lösen der gewöhnliichen GGl's:

$$-\frac{X'(x)}{X(x)} = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad X'(x) = -\lambda X(x)$$
$$X(x) = C_1 e^{-\lambda x}$$

und

$$\frac{T'(t)}{T(t)} + 1 = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad T'(t) = (\lambda - 1)T(t)$$
$$T(t) = C_2 e^{(\lambda-1)t}$$

ergibt zusammen die Lösung (mit $C_1 C_2 = C$):

$$u(x,t) = Ce^{-\lambda x} e^{(\lambda-1)t} \ .$$

b) Auswerten der Anfangsbedingung:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 3e^{2x} \\ Ce^{-\lambda x} &= 3e^{2x} \\ \Rightarrow \quad C = 3 \ , \quad \lambda &= -2 \ . \end{aligned}$$

Die Lösung des AWP's lautet

$$u(x,t) = 3e^{2x} e^{(-2-1)t} = 3e^{2x-3t} \ .$$

Verstaendnisteil

4. Aufgabe **10 Punkte**

a) Aus der Lösung $y_1(t) = t^2$ schließt man, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ein dreifacher Eigenwert ist. Aus der Lösung $y_2(t) = \cos t$ schließt man, daß $\lambda_4 = i$ ein weiterer Eigenwert ist. Damit muß auch $\lambda_5 = -i$ ein Eigenwert sein. Damit lautet das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^3 (\lambda + i)(\lambda - i) \\ &= \lambda^3 \left(\lambda^2 + 1\right) = \lambda^5 + \lambda^3 \ . \end{aligned}$$

Eine DGl dazu ist

$$y^{(5)} + y''' = 0 \ .$$

b) $y_1(t) = 1$, $y_2(t) = t$, $y_3(t) = t^2$, $y_4(t) = \sin t$ und $y_5(t) = \cos t$ bilden ein Fundamentalsystem.

c) Es liegt Resonanz mit einer einfachen Nullstelle $\lambda = \pm i$ vor. Der Ansatz lautet

$$y_p(t) = t(At + B)\cos t + t(Ct + D)\sin t \ .$$

5. Aufgabe **10 Punkte**

a) Die Impulsantwort $h(t)$ und die Übertragungsfunktion $H(s)$ erfüllen die Beziehungen

$$\begin{aligned} y(t) = h(t) * t \quad &\Rightarrow \quad Y(s) = H(s)\mathcal{L}[t](s) \quad = H(s)\frac{1}{s^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{s^3} + \frac{1}{s^4} = H(s)\frac{1}{s^2} \quad \Rightarrow \quad H(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \ . \end{aligned}$$

b) Die Impulsantwort erhält man durch Laplace-Rücktransformation

$$h(t) = 1 + t.$$

c)

$$e_2(t) = t^2 \quad \Rightarrow \quad E(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = H(s)\frac{2}{s^3} \quad = \frac{2}{s^4} + \frac{2}{s^5}$$

Die gesuchte Antwortfunktion ist die Rücktransformierte

$$y(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4 \ .$$

6. Aufgabe

Fourier-Transformation der DGl bzgl. x ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t) \quad = \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right](\omega)$$

Mit dem Differentiationssatz folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t)\ .$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 1.Ordnung bzgl. t. Ihre Lösung lautet:

$$U(\omega,t) = U(\omega,0)e^{-t\omega^2}\ .$$

Mit

$$u(x,0) = e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \Rightarrow$$
$$U(\omega,0) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}$$

folgt:

$$U(\omega,t) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\omega^2}{2}}e^{-t\omega^2} = \sqrt{2\pi}e^{-\omega^2\left(\frac{1}{2}+t\right)}$$