Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 2014/2015
Dozentin: Dr. G. Penn-Karras
Assistentin: Dr. C. Papenfuss 2.4.2015

April – Klausur Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Es ist ein handbeschriebenes A4 Blatt mit Notizen, sowie die Laplace-Tabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 30 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ

4	5	6	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe **9 Punkte**

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \vec{x} \ .$$

2. Aufgabe **10 Punkte**

Bestimmen Sie alle Lösungen der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ der partiellen Differentialgleichung

$$u_{tt} + u_{tx} = 0 \ .$$

Machen Sie, wenn nötig, eine Fallunterscheidung.

3. Aufgabe **11 Punkte**

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit der Methode der Laplace-Transformation:

$$y'' - 3y' - 4y = 5\delta(t-2) \ , \quad y(0) = 1 \ , \quad y'(0) = -1 \ .$$

$\delta(t-2) = \delta_2(t)$ bezeichnet die in $t = 2$ zentrierte Dirac-Funktion.

Verständnisteil

4. Aufgabe **10 Punkte**

a) Begründen Sie, warum das Anfangswertproblem

$$y' - e^x y^2 = 0 \ , \qquad y(0) = 1$$

eine eindeutige Lösung besitzt.

b) Bestimmen Sie diese Lösung.

c) Bestimmen Sie das maximale Definitionsintervall dieser Lösung.

5. Aufgabe **12 Punkte**

Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Geben Sie jeweils eine Begründung an. Als Begründung ist jeweils eine Argumentation oder eine kurze Rechnung verlangt. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.

a) Seien $x_1(t)$ und $x_2(t)$ zwei Lösungen der DGl

$$x''' - 3x' + x = te^t \ .$$

Dann ist $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ebenfalls eine Lösung der DGl.

b) Seien $u_1(x,t)$ und $u_2(x,t)$ zwei Lösungen der PDGl

$$x^2 u_{xx} + t u_{tt} = 0 \ .$$

Dann ist $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$ ebenfalls eine Lösung der PDGl.

c) $y(t) = t\cos t$ ist eine Lösung einer homogenen linearen DGl 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

d) Die DGL

$$y'' + 2y' + y = \cos t$$

hat eine partikuläre Lösung $y(t) = \frac{1}{2}\sin t$.

e) Die DGL

$$y'' - 2y' + y = e^t$$

hat eine Lösung der Form $y(t) = cte^t$, $c \in \mathbb{R}$.

f) Die Fouriertransformierte $F(\omega)$ der Funktion $f(t) = e^{-|t|}$, $t \in \mathbb{R}$ ist eine gerade Funktion von ω.

6. Aufgabe **8 Punkte**

Sei $y : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ Lösung der Gleichung

$$2y'(t) - \int_0^t y(t-\tau)\tau^2 d\tau = 2 - t^2$$

mit dem Anfangswert $y(0) = 0$. Bestimmen Sie $y(t)$.

Hinweis: Es gilt $s^4 - 1 = (s^2+1)(s^2-1)$.