WS 14/15

Integraltransformationen und partielle Differentialgleichungen für Ingenieure
Lösung Klausur April

Rechenteil

1. Aufgabe 9 Punkte

Bestimmen der Eigenwerte der Koeffizientenmatrix:

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 4 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{pmatrix} =$$
$$= (5-\lambda)\left((1-\lambda)(3-\lambda)-8\right) = (5-\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda-5\right) = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_{2,3} = 5 \ .$$

Zu $\lambda_1 = -1$ findet man den Eigenvektor $\vec{v_1}$

$$(A-\lambda_1 I)\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 4 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zu $\lambda_{2,3} = 5$ findet man einen Eigenvektor $\vec{v_2}$:

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Zum doppelten Eigenwert benötigt man einen Hauptvektor, den man iterativ bestimmen kann:

$$(A-\lambda_2 I)\vec{v}_3 = \vec{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Damit lautet die allgemeine Lösung des DGl-Systems:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t}\vec{v_1} + C_2 e^{\lambda_2 t}\vec{v_2} + C_3 e^{\lambda_3 t}\left(\vec{v_3} + t\vec{v_2}\right) \\ &= C_1 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{5t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) . \end{aligned}$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Der Ansatz führt auf

$$X\ddot{T} + X'\dot{T} = 0$$

und nach Trennung der Variablen

$$-\frac{\ddot{T}}{\dot{T}} = \frac{X'}{X} = \lambda \in \mathbb{R} .$$

Damit erhält man zwei gewöhnliche DGl's:

$$\begin{aligned} \ddot{T} &= -\lambda\dot{T} \\ \ddot{T} + \lambda\dot{T} &= 0 \end{aligned}$$

Fall I: $\lambda \neq 0$: Der Ansatz $T(t) = e^{\alpha t}$ führt auf

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \lambda\alpha &= 0 \\ \alpha_1 = 0 \ , \quad \alpha_2 &= -\lambda \\ T(t) &= C_1 + C_2 e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{X'}{X} &= \lambda \\ X(x) &= e^{\lambda x} . \end{aligned}$$

Damit hat man eine Lösung der partiellen DGl:

$$u(x,t) = \left(C_1 + C_2 e^{-\lambda t}\right) e^{\lambda x} .$$

Fall II: $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} \ddot{T}(t) &= 0 \\ T(t) &= C_3 + C_4 t \\ X(x) &= D \\ u(x,t) &= C_5 + C_6 t . \end{aligned}$$

3. Aufgabe 11 Punkte

$$y'' - 3y' - 4y = 5\delta(t-2)\ ,\quad y(0) = 1\ ,\quad y'(0) = -1\ .$$

Laplace-Transformation der DGl ergibt (mit $\mathcal{L}\left[y(t)\right](s) =: Y(s)$)

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3\left(sY(s) - y(0)\right) - 4Y(s) = \mathcal{L}[5\delta(t-2)](s)$$

$$\begin{aligned} s^2Y(s) - s + 1 - 3\left(sY(s) - 1\right) - 4Y(s) &= \mathcal{L}[5\delta(t-2)](s) \\ Y(s)(s^2 - 3s - 4) - s + 1 + 3 &= 5e^{-2s} \\ Y(s) = \frac{s-4}{s^2-3s-4} + \frac{5e^{-2s}}{s^2-3s-4} &= \frac{1}{s+1} + \frac{5e^{-2s}}{(s-4)(s+1)}\ . \end{aligned}$$

Für den zweiten Bruch benötigt man eine Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{5}{(s-4)(s+1)} &= \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+1} \\ \Rightarrow\quad 5 &= A(s+1) + B(s-4) \\ s = 4:\quad 5 = 5A &\quad \Leftrightarrow A = 1 \\ s = -1:\quad 5 = -5B &\quad \Leftrightarrow B = -1\ . \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s+1} + e^{-2s}\left(\frac{1}{s-4} - \frac{1}{s+1}\right) \\ &= \mathcal{L}[e^{-t}](s) + e^{-2s}\left(\mathcal{L}[e^{4t} - e^{-t}](s)\right) \\ &= \mathcal{L}[e^{-t}](s) + \mathcal{L}[u_2(t)\left(e^{4(t-2)} - e^{-t+2}\right)](s) \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösung lautet

$$y(t) = e^{-t} + u_2(t)\left(e^{4(t-2)} - e^{-t+2}\right)\ .$$

Verstaendnisteil

4. Aufgabe 10 Punkte

a) Die 'rechte Seite' der DGl $y' = e^x y^2$

$$F(x,y) = e^x y^2$$

ist stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= e^x y^2 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= e^x 2y\ . \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen des EES erfüllt, und das AWP ist eindeutig lösbar .

b) Die DGl ist separabel. Trennung der Variablen und Integration liefert:

$$\frac{y'}{y^2} = e^x$$
$$-\frac{1}{y} = e^x + C$$
$$y(x) = -\frac{1}{e^x + C}$$

Auswerten der Anfangsbedingung:

$$y(0) = 1 = -\frac{1}{e^0 + C}$$
$$C = -2$$
$$y(x) = -\frac{1}{e^x - 2} \ .$$

c) Es muss $e^x - 2 < 0$ sein, also $x < \ln 2$ Der maximale Defiitionsbereich ist also $]-\infty, \ln 2[$.

5. Aufgabe 12 Punkte

a) falsch
Einsetzen der Summe in die DGl liefert

$$(x_1 + x_2)''' - 3(x_1 + x_2)' + x_1 + x_2 = x_1''' + x_2''' - 3x_1' - 3x_2' + x_1 + x_2 = te^t + te^t = 2te^t \ ,$$

erfüllt also nicht die DGl.

b) wahr
Einsetzen der Summe in die DGl liefert

$$x^2(u_1 + u_2)_{xx} + t(u_1 + u_2)_{tt} = x^2 u_{1xx} + tu_{1tt} + x^2 u_{2xx} + tu_{2tt} = 0 + 0 = 0 \ .$$

Die Summe erfüllt also die DGl.

c) Falsch
Wenn $t \cos t$ eine Lösung ist, sind $\pm i$ doppelte Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit enthält das Fundamentalsystem mindestens $\cos t$, $\sin t$, $t \cos t$ und $t \sin t$. Die DGl muss mindestens 4. Ordnung sein.

d) wahr
Einsetzen in die DGl liefert

$$-\frac{1}{2} \sin t + \frac{2}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t = \cos t$$
$$\cos t = \cos t \ .$$

e) falsch
Entweder einsetzen und nachrechnen oder:
Die homogene DGl hat das charakteristische Polynom $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ mit der doppelten NS $\lambda = 1$. Es liegt also Resonanz mit einer doppelten NS vor, und der Ansatz für die partikuläre Lösung muss lauten $ct^2 e^t$.

f) wahr
Die Funktion $f(t) = e^{-|t|}$ ist gerade. Damit

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|} \left(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\right) dt = 2\int_{0}^{\infty} e^{-|t|} \cos(\omega t)dt =$$
$$= 2\int_{0}^{\infty} e^{-|t|} \cos(-\omega t)dt = \mathcal{F}[f(t)](-\omega) \ .$$

6. Aufgabe 8 Punkte

Anwenden der Laplacetransformation und Faltungssatz liefert (mit $\mathcal{L}[y(t)](s) =: Y(s)$)

$$\begin{aligned}
2y'(t) - y * t^2 &= 2 - t^2 \\
2sY(s) - 2y(0) - Y(s)\frac{2}{s^3} &= \frac{2}{s} - \frac{2}{s^3} \\
Y(s)\left(s - \frac{1}{s^3}\right) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s^3} \\
Y(s)\left(s^4 - 1\right) &= s^2 - 1 \\
Y(s) = \frac{s^2 - 1}{(s^2 - 1)(s^2 + 1)} &= \frac{1}{s^2 + 1} \ .
\end{aligned}$$

Rücktransformation ergibt die gesuchte Lösung

$$y(t) = \sin t \ .$$