Musterlösung
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
29. Juli 2016

1. Aufgabe

9 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\implies 0 = (1-\lambda)^2(-1-\lambda) - \big(3(1-\lambda) - 2(1-\lambda)\big)$$
$$\implies 0 = (1-\lambda)\big((1-\lambda)(-1-\lambda)+1\big)$$
$$\implies 0 = (1-\lambda)\lambda^2$$

ergeben sich der einfache Eigenwert 1 und der doppelte Eigenwert 0.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist (sowieso) eindimensional:

$$\operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist eindimensional:

$$\operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Beim Eigenwert 0 ist die algebraische Vielfachheit 2 größer als die geometrische Vielfachheit 1.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Anschauen der 3. Spalte findet man als eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{C}$$

Die allgemeine Lösung ist damit durch

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

gegeben.

2. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned}(s^2X - s - 2) - (sX - 1) - 2X &= 12\mathrm{e}^{-2s} \cdot \frac{1}{s^2}\\ (s^2 - s - 2)X - s - 1 &= \mathrm{e}^{-2s} \cdot \frac{12}{s^2}\\ X &= \frac{s+1}{(s^2 - s - 2} + \mathrm{e}^{-2s}\frac{12}{s^2(s^2 - s - 2)}\end{aligned}$$

Leichte Kürzung:

$$\frac{s+1}{s^2 - s - 2} = \frac{s+1}{(s+1)(s-2)} = \frac{1}{s-2}.$$

Wir benutzen jetzt die angegebene PBZ:

$$\frac{12}{s^2(s^2 - s - 2)} = \frac{12}{s^2(s+1)(s-2))} = \frac{3}{s} - \frac{6}{s^2} - \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s-2}.$$

Rücktransformation und Lösung:

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s-2} + \mathrm{e}^{-2s}\left(\frac{3}{s} - \frac{6}{s^2} - \frac{4}{s+1} + \frac{1}{s-2}\right)\\ &= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{2t} + u_2(t)\left(3 - 6(t-2) - 4\mathrm{e}^{-(t-2)} + \mathrm{e}^{2(t-2)}\right)\right](s)\end{aligned}$$

mit Satz von Lerch

$$x(t) = \mathrm{e}^{2t} + u_2(t)\left(3 - 6(t-2) - 4\mathrm{e}^{-(t-2)} + \mathrm{e}^{2(t-2)}\right)$$

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Partielle DGL ergibt mit dem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$:
$X''(x)T(t) + X(x)T'(t) + 2tX(x)T(t) = 0$
Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{T'(t)}{T(t)} + 2t = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda = -2t - \frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) + (\lambda + 2t)T(t) = 0.$$

Aus der Randbedingung

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$$

folgt die Aussage $X(0) = X(2\pi) = 0$.
Für die DGL $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ kann es nicht-konstante periodische Lösungen nur für $\lambda < 0$ geben. Wir setzen $\sqrt{-\lambda} := \mu$. Dann ist

$$X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$
$$X(0) = C_1 = 0 \implies X(\pi) = C_2 \sin \mu\pi = 0$$
$$\implies C_2 = 0 \text{ oder } \sin \mu\pi = 0$$

Nicht-verschwindende Lösungen $X(x)$ gibt es für solche Werte von μ, die die Gleichung $\sin \mu\pi = 0$ erfüllen. μ muss gleich einer natürlichen Zahl n mit $n > 0$ sein, also $\mu = n$. Damit ist λ gleich einer der Zahlen λ_n mit

$$\lambda_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Die DGL

$$T'(t) + (\lambda + 2t)T(t) = 0$$

wird durch

$$T(t) = C\mathrm{e}^{-(\lambda t + t^2)},\ C \in \mathbb{R}$$

gelöst.
Für jede Wahl von n ergibt sich eine Lösung T_n für T

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{-(\lambda_n t + t^2)} = \mathrm{e}^{n^2 t - t^2}$$

Für $u(x,t)$ hat man also die Funktionen $u_n(x,t)$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{n^2 t - t^2} \sin nx.$$

gefunden.

b) Mit der Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{n^2 t - t^2} \sin nx$$

sind Koeffizienten A_n zu suchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 5\sin 3x + 2\sin 4x,$$

also

$$A_3 = 5,\ \ A_4 = 2, \qquad A_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{3,4\};$$

Damit hat man für die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = 5\mathrm{e}^{9t-t^2} \sin 3x + 2\mathrm{e}^{16t-t^2} \sin 4x$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = -\int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$$
$$\Longrightarrow \ \arctan y = -\mathrm{e}^x + C$$
$$\Longrightarrow \ y = \tan(-\mathrm{e}^x + C)$$

mit einer Konstanten C.

$y(0) = 0$ führt zu $C = 1$; also

$$y(x) = \tan(1 - \mathrm{e}^x).$$

Der maximale Definitionsbereich wird durch die Pole von tan bestimmt, es muss gelten

$$-\tfrac{\pi}{2} < 1 - \mathrm{e}^x < \tfrac{\pi}{2}$$
$$-\tfrac{\pi}{2} - 1 < -\mathrm{e}^x < \tfrac{\pi}{2} - 1$$
$$\tfrac{\pi}{2} + 1 > \mathrm{e}^x > -\tfrac{\pi}{2} + 1$$
$$\Longrightarrow \ x \in \left]-\infty, \ln\left(\tfrac{\pi}{2} + 1\right)\right[.$$

($\pi/2 \approx 1,57$; die reelle Exponentialfunktion ist stets positiv.)

b) Die implizite DGL nach y' auflösen:

$$y' = -\mathrm{e}^x(1 + y^2)$$

Den EES benutzen: Man setzt

$$F(x, y) := \mathrm{e}^x(1 + y^2)$$

F hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \mathrm{e}^x(1 + y^2) \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 2\mathrm{e}^x y$$

Diese partiellen Ableitungen existieren in der gesamten Ebene $\mathbb{R}^2$ und sind dort stetig.

Alternativ: e^x und $1 + y^2$ sind auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so auch ihr Produkt.

Der Anfangspunkt $(0, 0)$ liegt in dieser Ebene.

Damit hat nach dem EES das vorgegebene AWP genau eine Lösung.

5. Aufgabe 10 Punkte

Das Integral lässt sich als Faltungsprodukt schreiben:

$$e^t * f(t) = te^{2t}.$$

Man kann somit den Faltungssatz der Laplace-Transformation anwenden.

Laplace-Transformation der Gleichung ergibt mit $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$

$$\frac{1}{s-1} \cdot F(s) = \frac{1}{(s-2)^2}.$$

Somit ist

$$F(s) = \frac{s-1}{(s-2)^2}$$

Mit $s - 1 = (s - 2) + 1$ ist die Partialbruchzerlegung schnell gefunden:

$$\frac{s-1}{(s-2)^2} = \frac{s-2+1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}.$$

Es ist also

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[(1+t)e^{2t}](s).$$

Da f als stetig vorausgesetzt wurde, ergibt sich aus dem Satz von Lerch genau

$$f(t) = (1+t)e^{2t}.$$

Dies ist die Lösung der vorgelegten Faltungsgleichung.

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.
Wenn A die Nullmatrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ist, ist sie nicht invertierbar. Dennoch wird die DGL z.B. durch $\vec{y}(t) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ gelöst.

b) Wahr.
Die Funktionen 1 und e^t lösen die DGL: $1'' - 1' = 0$ und $\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t = 0$.

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit wird der Wronski-Test an der Stelle 0 durchgeführt:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}_{|t=0} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{|t=0} = 1$$

Die Wronski-Determinante ist von Null verschieden, damit sind die Funktionen 1 und e^t auf $\mathbb{R}$ linear unabhängig.

Somit bilden diese Funktionen in der Tat ein Fundamentalsystem für die Lösungen der vorgelegten DGL.

c) Falsch.
Bei dieser DGL liegt ein Resonanzfall vor: Mit $\mu = 0$, $\omega = 1$ ist $\mu + \mathrm{i}\omega$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms $\lambda^2 + 1$. Der angegebene Ansatz ist nur der Erstansatz. Er muss noch mit x multipliziert werden.

d) Falsch.
Diese Laplace-Gleichung wird auch durch $u(x, y) = x - y$ gelöst, was sich nicht in die Form $X(x)Y(y)$ bringen lässt.

e) Falsch.

- α) Wegen der Betragsfunktion ist diese Funktion für $t = 0$ nicht differenzierbar.
- β) Das Produkt dieser Funktion mit $(1 + t)^2$ ergibt eine Funktion, die für $t \to \infty$ unbeschränkt wächst.