Musterlösung
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
06. Oktober 2016

1. Aufgabe

9 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 1-\lambda & 4 \\ 6 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
\implies 0 &= (1-\lambda)^2(-3-\lambda) - \big((-12)(1-\lambda) + 8(1-\lambda)\big) \\
\implies 0 &= (1-\lambda)\big(-(1-\lambda)(3+\lambda) + 4\big) \\
\implies 0 &= (1-\lambda)\big(\lambda^2 + 2\lambda + 1\big) \\
\implies 0 &= -(1-\lambda)(\lambda+1)^2
\end{aligned}$$

ergeben sich der einfache Eigenwert 1 und der doppelte Eigenwert -1.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist (sowieso) eindimensional:

$$\operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist eindimensional:

$$\operatorname{Kern}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

Beim Eigenwert -1 ist die algebraische Vielfachheit 2 größer als die geometrische Vielfachheit 1.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} .$$

Durch Anschauen der 3. Spalte findet man als eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad c \in \mathbb{C}$$

Die allgemeine Lösung ist damit durch

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right) , \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

gegeben.

2. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned}(s^2X - s - 3) - 4(sX - 1) + 4X &= \mathrm{e}^{-2s}\\ (s^2 - 4s + 4)X - s + 1 &= \mathrm{e}^{-2s}\\ X &= \frac{s-1}{s^2-4s+4} + \frac{\mathrm{e}^{-2s}}{s^2-4s+4}\end{aligned}$$

PBZ (mal ohne Zuhalten):

$$\begin{aligned}\frac{s-1}{s^2-4s+4} &= \frac{s-1}{(s-2)^2} = \frac{(s-2)+1}{(s-2)^2} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2}\\ \frac{1}{s^2-4s+4} &= \frac{1}{(s-2)^2}\end{aligned}$$

Rücktransformation und Lösung:

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s-2} + \frac{1}{(s-2)^2} + \mathrm{e}^{-2s} \cdot \frac{1}{(s-2)^2}\\ &= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{2t} + t\mathrm{e}^{2t} + u_2(t)(t-2)\mathrm{e}^{2(t-2)}\right](s)\end{aligned}$$

mit Satz von Lerch

$$x(t) = \mathrm{e}^{2t} + t\mathrm{e}^{2t} + u_2(t)(t-2)\mathrm{e}^{2(t-2)}$$

3. Aufgabe

12 Punkte

a) Partielle DGL ergibt mit dem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$X''(x)T(t) - \frac{1}{1+2t}X(x)T'(t) + 2X(x)T(t) = 0.$$

Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{1}{1+2t}\frac{T'(t)}{T(t)} + 2 = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda,\ \lambda = -2 + \frac{1}{1+2t} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) - (\lambda+2)(1+2t)T(t) = 0.$$

Aus der Randbedingung

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$$

folgt die Aussage $X(0) = X(2\pi) = 0$.
Für die DGL $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ kann es nicht-konstante periodische Lösungen nur für $\lambda < 0$ geben. Wir setzen $\sqrt{-\lambda} := \mu$. Dann ist

$$\begin{gathered} X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ X(0) = C_1 = 0 \implies X(\pi) = C_2 \sin \mu\pi = 0 \\ \implies C_2 = 0 \text{ oder } \sin \mu\pi = 0 \end{gathered}$$

Nicht-verschwindende Lösungen $X(x)$ gibt es für solche Werte von μ, die die Gleichung $\sin \mu\pi = 0$ erfüllen. μ muss gleich einer natürlichen Zahl n mit $n > 0$ sein, also $\mu = n$. Damit ist λ gleich einer der Zahlen λ_n mit

$$\lambda_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Die lineare DGL

$$T'(t) - (\lambda+2)(1+2t)T(t) = 0$$

löst man nach dem Schema $y' = a(x)y \implies y(x) = C \exp A(x)$.
Für $(\lambda+2)(1+2t)$ ist $(\lambda+2)(t+t^2)$ eine Stammfunktion. Es ist also

$$T(t) = C\mathrm{e}^{(\lambda+2)t(t+1)}.$$

Für jede Wahl von n ergibt sich eine Lösung T_n für T

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{(\lambda_n+2)t(t+1)}.$$

Für $u(x,t)$ hat man also die Funktionen $u_n(x,t)$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{(-n^2+2)t(t+1)} \sin nx.$$

gefunden.

b) Mit der Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{(-n^2+2)t(t+1)} \sin nx$$

sind Koeffizienten A_n zu suchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 5\sin 3x + 2\sin 4x,$$

also

$$A_3 = 5,\ A_4 = 2, \qquad A_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{3,4\};$$

Damit hat man für die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = 5\mathrm{e}^{-7t(t+1)} \sin 3x + 2\mathrm{e}^{-14t(t+1)} \sin 4x$$

4. Aufgabe

11 Punkte

a) Die implizite DGL nach y' auflösen:

$$y' = -\frac{1}{2}(1-y^2)\sin x$$

Den EES benutzen: Man setzt

$$F(x,y) := -\frac{1}{2}(1-y^2)\sin x$$

F hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{2}(1-y^2)\cos x \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = y\sin x$$

Diese partiellen Ableitungen existieren in der gesamten Ebene $\mathbb{R}^2$ und sind dort stetig.

Alternativ: $-\sin x$ und $1-y^2$ sind auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so auch ihr Produkt.

Jeder Anfangspunkt $(0,\alpha)$ liegt in dieser Ebene.

Damit hat nach dem EES das vorgegebene AWP für jeden Wert von α genau eine Lösung.

b) Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\int \sin x\,\mathrm{d}x \implies \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \frac{1}{2}\cos x + \tilde{C} \implies \frac{1+y}{1-y} = C\mathrm{e}^{\cos x}$$

$$\implies y(C\mathrm{e}^{\cos x}+1) = C\mathrm{e}^{2\cos x} - 1 \implies y(x) = \frac{C\mathrm{e}^{\cos x}-1}{C\mathrm{e}^{\cos x}+1}.$$

mit einer Konstanten C.

$y(\frac{\pi}{2}) = 0$ bedeutet

$$\frac{C-1}{C+1} = 0,$$

was $C=1$ zur Folge hat.

Eine Lösung des AWPs ist somit durch

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{\cos x}-1}{\mathrm{e}^{\cos x}+1}$$

gegeben.

Der Term für $y(x)$ weist innerhalb der Grundmenge $\mathbb{R}$ keine Definitionslücken auf; insbesondere ist der Nenner stets positiv. Der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$.

c) Scharfes Hingucken zeigt $y(x) = 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

(Weil es nur diese Lösung geben darf, muss der Versuch, aus dem in b) gefundenen Bruchterm einen Wert für C zu ermitteln, *zwingend* scheitern!)

5. Aufgabe 9 Punkte

a) i)

$$\mathcal{L}[\,t\sin 6t\,](s) = \frac{2\cdot 6s}{(s^2+6^2)^2} = \frac{12s}{(s^2+6^2)^2}.$$

ii) Die Faltung wird mit Hilfe der Laplace-Transformation ermittelt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\,t * \cos 3t\,](s) &= \frac{1}{s^2}\cdot\frac{s}{s^2+9} = \frac{1}{s(s^2+9)} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+9}\right)\\ &= \frac{1}{9}\mathcal{L}\left[1-\cos 3t\right](s),\end{aligned}$$

also

$$t * \cos 3t = \frac{1}{9}(1-\cos 3t).$$

b) i) Das Integral über t ist ein Laplace-Integral, wir benutzen das Ergebnis aus a)i):

$$\int_0^\infty t\sin(6t)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}[t\sin(6t)](2).$$

Folglich

$$\int_0^\infty t\sin(6t)\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{12s}{(s^2+6^2)^2}\right)\Big|_{s=2} = \frac{24}{40^2} = \frac{24}{1600} = \frac{3}{200}.$$

ii) Das Integral über u ist ein Faltungsintegral. Wir benutzen das Ergebnis aus a)ii):

$$\int_0^\pi (\pi-u)\cos(3u)\,\mathrm{d}u = (t*\cos 3t)\Big|_{t=\pi}.$$

Somit gilt

$$\int_0^\pi (\pi-u)\cos(3u)\,\mathrm{d}u = \left(\frac{1}{9}(1-\cos 3t)\right)\Big|_{t=\pi} = \frac{1}{9}(1-\cos 3\pi) = \frac{2}{9}.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.

   α) Da die Systemmatrix reell ist, sind von jeder vorgelegten komplexen Lösung der Realteil und der Imaginärteil selbst schon Lösungen, die zudem reell sind.

   β) Man hat z.B. mit $\left(\begin{smallmatrix}\cos x\\ \sin x\end{smallmatrix}\right)$ eine nichttriviale reelle Lösung.

b) Falsch.
Die Funktionen $2t+4$ und $-(2+t)$ sind nicht einmal linear unabhängig, da die erste Funktion das (-2)fache der zweiten Funktion ist. Also können sie kein Fundamentalsystem bilden

c) Wahr.
Das charakteristische Polynom dieser DGL ist λ^{42} und hat somit nur 0 als Nullstelle. Diese Nullstelle hat die Vielfachheit 42, damit bilden die Monome 1, x,..., x^{41} ein Fundamentalsystem für die Lösungen dieser DGL. Jedes Polynom 41. Grades ist eine Linearkombination dieser Monome und damit eine Lösung.

d) Wahr.
Es ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial x}+\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\\ &= \frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}=0+0=0.\end{aligned}$$

Damit ist die Summenfunktion u_1+u_2 ebenfalls eine Lösung.

e) Falsch.
Die Fouriertransformierte von f ist $F(\omega)=\pi\mathrm{e}^{-|\omega|}$ und damit stets von Null verschieden. Wäre die Funktion f von endlicher Bandbreite, so müsste es wenigstens eine Stelle ω_1 geben mit $F(\omega_1)=0$. Das ist nicht möglich. Somit ist die Funktion f nicht von endlicher Bandbreite.