Musterlösung
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
08. März 2016

1. Aufgabe

11 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
\implies 0 &= (1-\lambda)^2(-1-\lambda) - \big((-3)(1-\lambda) + 2(1-\lambda)\big) \\
\implies 0 &= (1-\lambda)\big((1-\lambda)(-1-\lambda) - (-3) - 2\big) \\
\implies 0 &= (1-\lambda)\big(\lambda^2 - 1 + 1) \\
\implies 0 &= (1-\lambda)\lambda^2
\end{aligned}$$

ergeben sich der einfache Eigenwert 1 und der doppelte Eigenwert 0.

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist (sowieso) eindimensional:

$$\mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum doppelten Eigenwert 0 ist nur eindimensional:

$$\mathrm{Kern}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Beim Eigenwert 0 ist die algebraische Vielfachheit 2 größer als die geometrische Vielfachheit 1.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Anschauen der 3. Spalte findet man als eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \alpha \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \alpha, c \in \mathbb{C}$$

In der Lösung

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

sind nun die Konstanten C_1, C_2 und C_3 aufzufinden, so dass

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Die zweite und dritte Zeile liefern $C_1 = C_2 = C_3$, die erste dann $C_1 = -1$. Die gesuchte Lösung des AWPs ist

$$\vec{y}(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned}(s^2X-1)+4sX+4X &= \frac{4}{s^2}\mathrm{e}^{-3s}\\ (s^2+4s+4)X-1 &= \frac{4}{s^2}\mathrm{e}^{-3s}\\ X &= \frac{1}{s^2+4s+4}+\frac{4\mathrm{e}^{-3s}}{s^2(s^2+4s+4)}\end{aligned}$$

Umformungen:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{s^2+4s+4}=\frac{1}{(s+2)^2}\\ &\frac{4}{s^2(s^2+4s+4)}=\frac{4}{s^2(s+2)^2}=-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+2)^2}\end{aligned}$$

Rücktransformation und Lösung:

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{(s+2)^2}+\mathrm{e}^{-3s}\left(-\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+2)^2}\right)\\ &= \mathcal{L}\left[t\mathrm{e}^{-2t}+u_3(t)\left(-1+(t-3)+\mathrm{e}^{-2(t-3)}+(t-3)\mathrm{e}^{-2(t-3)}\right)\right](s)\end{aligned}$$

mit Satz von Lerch

$$\begin{aligned}x(t) &= t\mathrm{e}^{-2t}+u_3(t)\left(-1+(t-3)+\mathrm{e}^{-2(t-3)}+(t-3)\mathrm{e}^{-2(t-3)}\right)\\ \text{auch: } &= t\mathrm{e}^{-2t}+u_3(t)\left(t-4+(t-2)\mathrm{e}^{-2(t-3)}\right).\end{aligned}$$

3. Aufgabe

11 Punkte

a) Partielle DGL ergibt mit dem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$X''(x)T(t) - X(x)T'(t) + 2X(x)T(t) = 0.$$

Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{T'(t)}{T(t)} + 2 = 0 \implies \frac{X''(x)}{X(x)} =: \lambda,\ \lambda = -2 + \frac{T'(t)}{T(t)}$$

DGLn in X und T:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \qquad T'(t) - (\lambda + 2)T(t) = 0.$$

Aus der Randbedingung

$$u(0,t) = u(2\pi, t) = 0$$

folgt die Aussage $X(0) = X(2\pi) = 0$.
Für die DGL $X''(x) - \lambda X(x) = 0$ kann es nicht-konstante periodische Lösungen nur für $\lambda < 0$ geben. Wir setzen $\sqrt{-\lambda} := \mu$. Dann ist

$$\begin{gathered} X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ X(0) = C_1 = 0 \implies X(\pi) = C_2 \sin \mu\pi = 0 \\ \implies C_2 = 0 \text{ oder } \sin \mu\pi = 0 \end{gathered}$$

Nicht-verschwindende Lösungen $X(x)$ gibt es für solche Werte von μ, die die Gleichung $\sin \mu\pi = 0$ erfüllen. μ muss gleich einer natürlichen Zahl n mit $n > 0$ sein, also $\mu = n$. Damit ist λ gleich einer der Zahlen λ_n mit

$$\lambda_n = -n^2, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Die lineare DGL

$$T' - (\lambda + 2)T = 0$$

wird von

$$T(t) = C\mathrm{e}^{(\lambda+2)t}.$$

gelöst, somit ergibt sich für jede Wahl von n die Lösung T_n mit

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{(\lambda_n+2)t}.$$

Für $u(x,t)$ hat man also die Funktionen $u_n(x,t)$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{(-n^2+2)t} \sin nx.$$

gefunden.

b) Mit der Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{(-n^2+2)t} \sin nx$$

sind Koeffizienten A_n zu suchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 4 \sin 2x + 3 \sin 5x,$$

also

$$A_2 = 4,\ \ A_5 = 3, \qquad A_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{2, 5\};$$

Damit hat man für die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = 4\mathrm{e}^{-2t} \sin 2x + 3\mathrm{e}^{-23t} \sin 5x$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Die implizite DGL nach y' auflösen:

$$y' = -2x(1+y)^2$$

Den EES benutzen: Man setzt

$$F(x,y) := -2x(1+y)$$

F hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2(1+y)^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -4x(1+y)$$

Diese partiellen Ableitungen existieren in der gesamten Ebene $\mathbb{R}^2$ und sind dort stetig.

Alternativ: $2x$ und $(1+y)^2$ sind auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so auch ihr Produkt.

Jeder Anfangspunkt $(1, \alpha)$ liegt in dieser Ebene.

Damit hat nach dem EES das vorgegebene AWP für jeden Wert von α genau eine Lösung.

b) Trennung der Veränderlichen ergibt

$$-\int \frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2} = \int 2x\,\mathrm{d}x \implies \frac{1}{1+y} = x^2 + C \implies y(x) = \frac{1}{x^2+C} - 1$$

mit einer Konstanten C.

$y(1) = 0$ bedeutet

$$\frac{1}{1+C} - 1 = 0,$$

was $C = 0$ zur Folge hat.

Eine Lösung des AWPs ist somit durch

$$y(x) = x^{-2} - 1$$

gegeben.

Der Term für $y(x)$ weist innerhalb der Grundmenge $\mathbb{R}$ eine Definitionslücke an der Stelle 0 auf. Der maximale Definitionsbereich ist $]0, \infty[$.

c) Scharfes Hingucken zeigt $y(x) = -1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Es gilt

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4(t-2)^2}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+(2(t-2))^2}\right](\omega)$$
$$= \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+(2t)^2}\right](\omega) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\pi\mathrm{e}^{-\frac{|\omega|}{2}-2\mathrm{i}\omega}$$

b) Es gilt

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+4(u-2)^2)(1+(t-u)^2)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{1+4(t-2)^2} * \frac{1}{1+t^2}.$$

Die Fouriertransformierte dieses Faltungsprodukts wird mit dem Faltungssatz berechnet. Es ist

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4(t-2)^2} * \frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4(t-2)^2}\right](\omega)\cdot\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega)$$
$$= \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{|\omega|}{2}-2\mathrm{i}\omega}\cdot\pi\mathrm{e}^{-|\omega|} = \frac{\pi^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3|\omega|}{2}-2\mathrm{i}\omega}.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.
Das charakteristische Polynom hat mindestens die Nullstellen 0, i und −i. Die Nullstellen i und −i sind mindestens dreifach. Das charakteristische Polynom ist also mindestens vom 7. Grad. Folglich muss eine solche DGL von mindestens 7. Ordnung sein.

b) Wahr.
Einsetzen zeigt, dass diese Funktionen die DGL lösen: Bei 1 ist es klar; Bei $\ln t$ hat man

$$\left(-\frac{1}{t^2}\right) + \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t}\right) = -1 + 1 = 0.$$

Die Wronski-Determinante verschwindet nicht für $t > 0$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \ln t \\ 0 & \frac{1}{t} \end{pmatrix} = \frac{1}{t} \neq 0.$$

Die Funktionen 1 und $\ln t$ sind auf $\mathbb{R}^+$ linear unabhängig. Damit bilden sie ein Fundamentalsystem für die Lösungen der vorgelegten DGL.

c) Falsch.
Es gilt nach dem Faltungssatz

$$\mathcal{F}[r_1(t) * r_1(t)](\omega) = \left(\frac{\sin \omega}{\omega}\right)^2$$

Es gibt keine Grenzkreisfrequenz ω_0, so dass dieser Quotient für $|\omega| > \omega_0$ verschwände. Die Faltung $r_1 * r_1$ (übrigens eine Dreiecksfunktion) hat also keine endliche Bandbreite.

d) Falsch.
Wegen

$$A_{\text{in}} = \frac{1}{s+1} \text{ und } A_{out} = \frac{1}{s+2}$$

ist die Beziehung

$$A_{\text{in}} \cdot H(s) = A_{\text{out}}$$

falsch, da

$$\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} \neq \frac{1}{(s+2)^2}.$$

e) Wahr.
Es ist

$$\frac{\partial^2(\cos(x+2t))}{\partial x^2} = \frac{\partial(-\sin(x+2t))}{\partial x} = -\cos(x+2t)$$

$$\frac{\partial^2(\cos(x+2t))}{\partial t^2} = \frac{\partial(-2\sin(x+2t))}{\partial t} = -4\cos(x+2t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \big(-\cos(x+2t)\big) - \frac{1}{4}\big(-4\cos(x+2t)\big) = -\cos(x+2t) + \cos(x+2t) = 0.$$