Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 16/17

G. Penn-Karras 13. April 2017

April – Klausur
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie im Rechenteil immer den **vollständigen Rechenweg** und im Verständnisteil, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Gesamtklausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 Punkte erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	Σ_R	4	5	6	Σ_V	Σ

Rechenteil

1. Aufgabe

11 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die Lösung $\vec{y}(t)$ des Anfangswertsproblems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Methode der Laplace-Transformation die Lösung $x(t)$ für das Anfangswertsproblem

$$\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 2\delta_3(t), \qquad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 2.$$

Dabei steht $\delta_3(t)$ für die bei $t = 3$ konzentrierte Dirac-Funktion.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben ist das reelle Randwertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{9}{4}u = 0, \qquad u(0,t) = u(2\pi,t) = 0, \; t \geq 0.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$, die die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 4\sin\frac{1}{2}x + 5\sin\frac{3}{2}x$$

erfüllt.

Hinweis: Konstruieren Sie Ihre Separationskonstante λ so, dass die DGL für X von der Form $X'' - \lambda X = 0$ ist.

Bitte 2. Blatt beachten!

Verständnisteil

4. Aufgabe

10 Punkte

In Abhängigkeit von einer reellen Zahl α ist das folgende reelle Anfangswertsproblem (AWP) gegeben:

$$y' + \mathrm{e}^x y^2 = 0, \quad y(0) = \alpha.$$

a) Zeigen Sie mit einem Existenz- und Eindeutigkeitssatz, dass das AWP für jeden Wert von α genau eine Lösung hat.

b) Ermitteln Sie für $\alpha = -1$ die Lösung des AWPs zusammen mit ihrem maximalen Definitionsbereich.

c) Geben Sie für $\alpha = 0$ die Lösung des AWPs zusammen mit ihrem maximalen Definitionsbereich an.

Hinweise: Die Unteraufgaben a), b) und c) können unabhängig voneinander bearbeitet werden.

5. Aufgabe

10 Punkte

Berechnen Sie die Fourier-Transformierten

$$\text{a)} \quad \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-2|t-3|}\right](\omega)$$

und

$$\text{b)} \quad \mathcal{F}[g(t)](\omega) \quad \text{mit} \quad g(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t-u|}\, \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\, \mathrm{d}u.$$

Hinweis: Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t|}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}t = \frac{2}{1+\omega^2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

Bitte wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt 2 Punkte. Antworten ohne Begründung oder mit einer falschen Begründung bringen keine Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) Wird eine homogene lineare Differentialgleichung 4. Ordnung mit konstanten Koeffizienten von der Funktion $y_1(t) = t^2$ gelöst, so wird sie auch von $y_2(t) = t\,\mathrm{e}^t$ gelöst.

b) Für die lineare inhomogene DGL $y' - y = t$ ist die Funktion $y(t) = t + \mathrm{e}^t$ eine partikuläre Lösung.

c) Für drei Schwartz-Funktionen $f(t)$, $g(t)$ und $h(t)$ gilt die Gleichung

$$\mathcal{F}[(f * g) \cdot h](\omega) = \big(\mathcal{F}[f](\omega) \cdot \mathcal{F}[g](\omega)\big) * \mathcal{F}[h](\omega).$$

d) Ein LTI-System mit der Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{1}{s+1}$ antwortet auf das Eingangssignal $a_{\text{in}}(t) = \mathrm{e}^{-t}$ mit dem Ausgangssignal $a_{\text{out}}(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$.

e) Eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

ist $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t} \sin x$.