Musterlösung
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen
13. April 2017

1. Aufgabe

11 Punkte

Aus

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 3 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Longrightarrow \; 0 = (-\lambda)^2(-2-\lambda) - (6\lambda - 4\lambda)$$
$$\Longrightarrow \; 0 = \lambda^2(-2-\lambda) - 2\lambda$$
$$\Longrightarrow \; 0 = -\lambda(2\lambda + \lambda^2 + 2)$$
$$\Longrightarrow \; 0 = -\lambda(\lambda+1)^2$$

ergeben sich der doppelte Eigenwert -1 und der einfache Eigenwert 0.

Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist (sowieso) eindimensional:

$$\text{Kern}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum doppelten Eigenwert -1 ist nur eindimensional:

$$\text{Kern}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\right) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Beim Eigenwert -2 ist die algebraische Vielfachheit 2 größer als die geometrische Vielfachheit 1.

Folglich ist ein weiterer, linear unabhängiger Hauptvektor h zum Eigenwert 1 zu suchen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{h} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durch Anschauen der 3. Spalte findet man als eine inhomogene Lösung:

$$\vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Allgemein:

$$\vec{h} = \alpha \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \alpha, c \in \mathbb{C}$$

In der Lösung

$$\vec{y}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{-t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

sind nun die Konstanten C_1, C_2 und C_3 aufzufinden, so dass

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

gilt. Hingucken liefert $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1$. Es ist

$$\vec{y}(t) = \vec{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + +\mathrm{e}^{-t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. Aufgabe

9 Punkte

Mit $X(s) := \mathcal{L}[x](s)$ ergibt sich im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned}(s^2X-2)-4sX+3X &= 2\mathrm{e}^{-3s}\\ (s^2-4s+3)X-2 &= 2\mathrm{e}^{-3s}\\ X &= \frac{2}{s^2-4s+3}+\frac{2\mathrm{e}^{-3s}}{s^2-4s+3}\end{aligned}$$

Nur eine PBZ nötig:

$$\frac{2}{s^2-4s+3}=\frac{2}{(s-3)(s-1)}=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-1}$$

Rücktransformation und Lösung:

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-1}+\mathrm{e}^{-3s}\left(\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s-1}\right)\\ &= \mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{t}+u_3(t)\left(\mathrm{e}^{3(t-3)}-\mathrm{e}^{t-3}\right)\right](s)\end{aligned}$$

mit Satz von Lerch

$$x(t)=\mathrm{e}^{3t}-\mathrm{e}^{t}+u_3(t)\left(\mathrm{e}^{3(t-3)}-\mathrm{e}^{t-3}\right).$$

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Partielle DGL ergibt mit dem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$:

$$X''T + XT' + \frac{9}{4}XT = 0.$$

Für $u(x,t) \neq 0$ ist Division der DGL durch Produkt $X(x)T(t)$ und Separation statthaft:

$$\frac{X''}{X} + \frac{T'}{T} + \frac{9}{4} = 0 \implies \frac{X''}{X} =: \lambda, \ \lambda = -\frac{T'}{T} - \frac{9}{4}.$$

DGLn in X und T:

$$X'' - \lambda X = 0, \qquad T' + \left(\lambda + \frac{9}{4}\right) T = 0.$$

Aus der Randbedingung

$$u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$$

folgt die Aussage $X(0) = X(2\pi) = 0$.
Für die DGL $X'' - \lambda X = 0$ kann es nicht-konstante periodische Lösungen nur für $\lambda < 0$ geben. Wir setzen $\sqrt{-\lambda} := \mu$. Dann ist

$$\begin{gathered} X(x) = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x, \ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ X(0) = C_1 = 0 \implies X(2\pi) = C_2 \sin 2\pi\mu = 0 \\ \implies C_2 = 0 \text{ oder } \sin 2\mu\pi = 0 \end{gathered}$$

Nicht-verschwindende Lösungen $X(x)$ gibt es für solche Werte von μ, die die Gleichung $\sin 2\pi\mu = 0$ erfüllen. μ muss gleich einer positiven halbganzen Zahl $\frac{n}{2}$ mit $n \in \mathbb{N}, \ n > 0$ sein.
Damit ist λ gleich einer der Zahlen λ_n mit

$$\lambda_n = -\frac{n^2}{4}, \quad n \in \mathbb{N}, n > 0.$$

Die lineare DGL

$$T' + \left(\lambda + \frac{9}{4}\right) T = 0$$

wird von

$$T(t) = C\mathrm{e}^{-(\lambda + \frac{9}{4})t} = C\mathrm{e}^{\frac{n^2-9}{4}t}.$$

gelöst, somit ergibt sich für jede Wahl von n die Lösung T_n mit

$$T_n(t) = \mathrm{e}^{\frac{n^2-9}{4}t}.$$

Für $u(x,t)$ hat man also die Funktionen $u_n(x,t)$ mit $n \in \mathbb{N}, n > 0$:

$$u_n(x,t) := \mathrm{e}^{\frac{n^2-9}{4}t} \sin \frac{n}{2}x.$$

gefunden.

b) Mit der Superposition

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathrm{e}^{\frac{n^2-9}{4}t} \sin \frac{n}{2} x$$

sind Koeffizienten A_n zu suchen mit

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx = 4 \sin \frac{1}{2} x + 5 \sin \frac{3}{2} x,$$

also

$$A_1 = 4,\ A_3 = 5, \qquad A_n = 0 \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1,3\};$$

Damit hat man für die gesuchte Lösung

$$u(x,t) = 4\mathrm{e}^{-2t} \sin \frac{1}{2} x + 5 \sin \frac{3}{2} x.$$

4. Aufgabe

10 Punkte

a) Die implizite DGL nach y' auflösen:

$$y' = -\mathrm{e}^x y^2$$

Den EES benutzen: Man setzt

$$F(x,y) := -\mathrm{e}^x y^2$$

F hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\mathrm{e}^x y^2 \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -2\mathrm{e}^x y$$

Diese partiellen Ableitungen existieren in der gesamten Ebene $\mathbb{R}^2$ und sind dort stetig.

Alternativ: e^x und y^2 sind auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, so auch ihr Produkt.

Jeder Anfangspunkt $(0,\alpha)$ liegt in dieser Ebene.

Damit hat nach dem EES das vorgegebene AWP für jeden Wert von α genau eine Lösung.

b) Trennung der Veränderlichen ergibt

$$-\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x \implies \frac{1}{y} = \mathrm{e}^x + C \implies y(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + C}$$

mit einer Konstanten C.

$y(0) = -1$ bedeutet

$$\frac{1}{1+C} = -1,$$

was $C = -2$ zur Folge hat.

Die Lösung des AWPs ist somit durch

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - 2}$$

gegeben.

Der Term für $y(x)$ weist innerhalb der Grundmenge $\mathbb{R}$ eine Definitionslücke an der Stelle $\ln 2$ auf. Der maximale Definitionsbereich ist $]-\infty, \ln 2[$.

c) Scharfes Hingucken zeigt $y(x) = 0$ mit $x \in \mathbb{R}$.

(Der Versuch, hier ein passendes C zu finden, scheitert: Es gibt keinen Wert für C, so dass $y(x) = 0$ gilt.)

5. Aufgabe

10 Punkte

a) Es gilt

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-2|t-3|}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|2t-6|}\right](\omega) = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|t-6|}\right]\left(\frac{\omega}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-6\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|t|}\right]\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega}\cdot\frac{2}{1+\left(\frac{\omega}{2}\right)^2} = \frac{4\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\omega}}{4+\omega^2}.$$

b) Es gilt

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|t-u|}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-|t|} * \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$$

Die Fouriertransformierte dieses Faltungsprodukts wird mit dem Faltungssatz berechnet.
Es ist

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|t|} * \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|t|}\right](\omega)\cdot\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}](\omega)$$
$$= \frac{2}{1+\omega^2}\cdot\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}} = \frac{\sqrt{8\pi}}{1+\omega^2}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{2}}.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Falsch.

   α) Man konstruiert sich eine solche DGL, die von y_1, aber nicht von y_2 gelöst wird: z.B. $y^{(4)} = 0$.

   β) Das charakteristische Polynom ist vom Grad 4.

   Weil t^2 eine Lösung der DGL ist, hat das charakteristische Polynom die Stelle 0 als mindestens dreifache Nullstelle.

   Ist $t\mathrm{e}^t$ eine weitere Lösung der DGL, so hat das charakteristische Polynom die Stelle 1 als mindestens doppelte Nullstelle und ist dann mindestens vom Grad 5. Widerspruch.

b) Falsch.
Mit $y' = 1 + \mathrm{e}^t$ erfüllt die Funktion $t + \mathrm{e}^t$ die inhomogene DGL nicht und ist damit keine partikuläre Lösung.

c) Falsch.
Es muss irgendwo ein Faktor 2π erscheinen. Genauer:

$$\mathcal{F}[(f*g)\cdot h](\omega) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}[f*g](\omega)*\mathcal{F}[h](\omega) = \frac{1}{2\pi}\big(\mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[g](\omega)\big)*\mathcal{F}[h](\omega).$$

d) Wahr.
Mit

$$A_{\text{in}} \cdot H(s) = A_{\text{out}}$$

findet man

$$\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2},$$

und damit $a_{\text{out}} = t\mathrm{e}^{-t}$.

e) Wahr.
Es ist

$$\frac{\partial^2(\mathrm{e}^{-t}\,\sin x)}{\partial x^2} = \mathrm{e}^{-t}\,\frac{\partial^2(\sin x)}{\partial x^2} = -\mathrm{e}^{-t}\sin x$$

$$\frac{\partial(\mathrm{e}^{-t}\,\sin x)}{\partial t} = \sin x\,\frac{\partial(\mathrm{e}^{-t})}{\partial t} == -\mathrm{e}^{-t}\sin x$$

$$\frac{\partial^2(\mathrm{e}^{-t}\,\sin x)}{\partial x^2} = \frac{\partial(\mathrm{e}^{-t}\,\sin x)}{\partial t}.$$