Rechenteil

1. Aufgabe (7+2 Punkte)

a) Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix: Charakt. Polynom:

$$\det\,(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2(4-\lambda).$$

Wir erhalten $\lambda_1 = 3$ (doppelter EW) und $\lambda_2 = 4$. Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 3$:

$$(A-\lambda_1 E)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \iff v_1 = 0 \text{ und } v_2 + v_3 = 0$$

ergibt

$$\vec{v}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt keinen weiteren, von $\vec{v}^{(1)}$ linear unabh. Eigenvektor zu $\lambda_1 = 3$. Die algebraische Vielfachheit von λ_1 ist aber 2. Daher suchen wir einen weiteren Hauptvektor $\vec{w}$ mit

$$(A-\lambda_1 E)\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{w} = \vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses System wird z. B. gelöst durch

$$\vec{w} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 4$ ist einfacher Eigenwert.

$$(A-\lambda_2 E)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \iff v_3 = v_2 = 0.$$

Eigenvektor zu $\lambda_2 = 4$ ist daher:

$$\vec{v}^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Fundamentalsystem:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = e^{t\lambda_1}\vec{v}^{(1)} = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{(2)}(t) &= e^{t\lambda_1}\exp\left(t[A-\lambda_1 E]\right)\vec{w} \\
&= e^{t\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}[A-\lambda_1 E]^k\vec{w} = e^{t\lambda_1}[\vec{w}+t(A-\lambda_1 E)\vec{w}] = e^{t\lambda_1}[\vec{w}+t\vec{v}^{(1)}] \\
&= e^{3t}\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right] = e^{3t}\begin{pmatrix}-1/2\\-t\\3/2+t\end{pmatrix}, \\
\vec{x}^{(3)}(t) &= e^{t\lambda_2}\vec{v}^{(2)} = e^{4t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= C_1\vec{x}^{(1)}(t)+C_2\vec{x}^{(2)}(t)+C_3\vec{x}^{(3)}(t) \\
&= C_1e^{3t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}-1/2\\-t\\3/2+t\end{pmatrix}+C_3e^{4t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad C_1,C_2,C_3 \text{ Konstanten.}
\end{aligned}$$

b) Zur Lösung des Anfangswertproblems sind die Konstanten C_1, C_2, C_3 aus (a) so zu bestimmen, dass die Anfangsbedingung erfüllt wird, d.h.

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = \vec{x}(0) = \sum_{k=1}^{3}C_k\vec{x}_k(0) = C_1\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+\frac{C_2}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Dies ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix}0&\frac{-1}{2}&0\\-1&0&0\\1&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow C_2=2, \quad C_1=-3$$

und $C_3 = 1 - C_1 - 3C_2/2 = 1$.

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit

$$\vec{x}(t) = -3e^{3t}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}+2e^{3t}\begin{pmatrix}-1/2\\-t\\3/2+t\end{pmatrix}+e^{4t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe (3+6 Punkte)

a) Mit der Einheitssprungfunktion u_a gilt:

$$f(t) = u_1(t) - u_3(t).$$

Mit dem Verschiebungssatz folgt nun:

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[u_1(t)-u_3(t)](s) = \frac{1}{s}\left(e^{-s}-e^{-3s}\right)$$

b) Die Anwendung der Laplace-Transformation auf das AWP ergibt :

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}\left[y'' + 25y\right](s) = s^2\mathcal{L}[y](s) - y'(0) - sy(0) + 25\mathcal{L}[y](s)$$

$$= \left(s^2+25\right)\mathcal{L}[y](s) - 3 + 2s.$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s^2+25}\mathcal{L}[f](s) + \frac{3-2s}{s^2+25} = \frac{1}{s(s^2+25)}\left(e^{-s} - e^{-3s}\right) + \frac{3-2s}{s^2+25}.$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{s(s^2+25)} = \frac{As+B}{s^2+25} + \frac{C}{s}.$$

Einsetzmethode liefert:

$$C = \left(\frac{1}{s^2+25}\right)_{s=0} = \frac{1}{25},$$

$$A5i + B = \left(\frac{1}{s}\right)_{s=5i} = \frac{1}{5i} = \frac{-i}{5} \Rightarrow A = \frac{-1}{25} \text{ und } B = 0,$$

also

$$\frac{1}{s(s^2+25)} = \frac{1}{25}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+25}\right).$$

Wir erhalten

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{25}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+25}\right)\left(e^{-s} - e^{-3s}\right) + \frac{3-2s}{s^2+25}$$

$$= \frac{1}{25}\left(\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(5t)](s)\right)\left(e^{-s} - e^{-3s}\right) + \frac{3}{5}\mathcal{L}[\sin(5t)](s) - 2\mathcal{L}[\cos(5t)](s).$$

Rücktransformation ergibt mit dem Verschiebungssatz

$$y(t) = \frac{1}{25}\left(u_1(t)(1 - \cos 5(t-1)) - u_3(t)(1 - \cos 5(t-3))\right) + \frac{3}{5}\sin(5t) - 2\cos(5t).$$

3. Aufgabe (5+4+3 Punkte)

a) Einsetzen des Produktansatzes $u(x,t) = F(x)G(t)$ in Dgl. ergibt

$$F(x)G'(t) = u_t(x,t) = 5u_{xx}(x,t) = 5F''(x)G(t),$$

damit

$$\frac{G'(t)}{5G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad (\text{ Konstante }),$$

d.h.

$$F''(x) = \lambda F(x), \quad G'(t) = 5\lambda G(t).$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung für G lautet:

$$G(t) = Ce^{5\lambda t}, \quad C \text{ Konstante }.$$

Die Bedingung

$$\lim_{t\to\infty} G(t) = 0$$

ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\lambda < 0.$$

In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung der Gleichung für F:

$$F(x) = A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir erhalten

$$u(x,t) = F(x)G(t) = \left(A\cos\sqrt{-\lambda}x + B\sin\sqrt{-\lambda}x\right) Ce^{5\lambda t},$$

$$= \left(\alpha\cos\sqrt{-\lambda}x + \beta\sin\sqrt{-\lambda}x\right) e^{5\lambda t},$$

mit neuen Konstanten.

b) Mit

$$u_x(x,t) = \sqrt{-\lambda}\left(-\alpha\sin\sqrt{-\lambda}x + \beta\cos\sqrt{-\lambda}x\right) e^{5\lambda t}$$

ergibt Einsetzen in die (homognen) Randbedingungen:

$$0 = u_x(0,t) = \sqrt{-\lambda}\beta e^{5\lambda t} \text{ und } 0 = u(\pi/2,t) = \left(\alpha\cos\sqrt{-\lambda}\pi/2 + \beta\sin\sqrt{-\lambda}\pi/2\right) e^{5\lambda t}$$

für alle $t > 0$ und damit $\beta = 0$ und $\alpha\cos(\sqrt{-\lambda}\pi/2) = 0$.
Sofern $\alpha \neq 0$, muss $\cos(\sqrt{-\lambda}\pi/2) = 0$ gelten. Daher muss $\sqrt{-\lambda}$ eine ungerade ganze Zahl sein, also

$$\sqrt{-\lambda} = 2m-1, \quad \lambda = -(2m-1)^2 \text{ mit } m \in \mathbb{N}.$$

Damit erhalten wir

$$u(x,t) = \alpha(\cos(2m-1)x)e^{-5(2m-1)^2 t}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

c) Durch Überlagerung dieser Lösungen erhalten wir wieder eine Lösung der Dgl. mit den homognen Randbedingungen :

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (\cos(2m-1)x)\, e^{-5(2m-1)^2 t}.$$

Mit der Anfangsbedingung für u folgt

$$3\cos x - 2\cos 3x = u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos(2m-1)x.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\alpha_1 = 3, \text{ und } \alpha_2 = -2, \text{ sonst } \alpha_m = 0.$$

Damit lautet die Lösung des AWP

$$u(x,t) = 3(\cos x)\, e^{-5t} - 2(\cos 3x)\, e^{-5\cdot 3^2 t} = 3(\cos x)\, e^{-5t} - 2(\cos 3x)\, e^{-45t}.$$

Verständnisteil

4. Aufgabe (4+3+4 Punkte)

a) Für die Systemantwort auf

$$F(t) = e^{-t}$$

und die Übertragungsfunktion gilt:

$$\mathcal{L}[S[F]](s) = G(s)\mathcal{L}[F](s) = \frac{G(s)}{s+1}.$$

Anderseits

$$\mathcal{L}[S[F]](s) = \mathcal{L}[e^{-t} - e^{2t}](s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2},$$

und damit

$$G(s) = 1 - \frac{s+1}{s-2} = \frac{-3}{s-2}.$$

Für die durch

$$\mathcal{L}[h](s) = G(s)$$

gegebene Impulsantwort erhalten wir somit

$$h(t) = -3e^{2t}.$$

b) Sei $y = S[f]$ die Systemantwort auf $f(t) = e^{2t}$.
Dann gilt mit der Übertragungsfunktion G :

$$\mathcal{L}[y](s) = G(s)\mathcal{L}[f](s) = \frac{-3}{s-2} \cdot \frac{1}{s-2} = \frac{-3}{(s-2)^2}.$$

Rücktransformation ergibt

$$y(t) = -3te^{2t}.$$

c) Es gilt:

$$\mathcal{L}[S[u]](s) = G(s)\mathcal{L}[u](s) = \frac{-3}{s-2}\mathcal{L}[u](s)$$

$$= \mathcal{L}[t^2 e^{2t}](s) = \frac{2}{(s-2)^3}.$$

Auflösen nach $\mathcal{L}[u](s)$ ergibt

$$\mathcal{L}[u](s) = \frac{-2}{3(s-2)^2}.$$

damit

$$u(t) = \frac{-2t}{3}e^{2t}.$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

a) Richtig! Wir setzen $\vec{x}$ in das System ein:

$$\vec{0} = \dot{\vec{x}}(t) - A\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - tA \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ und } A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Dies bedeutet, dass $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert Null sein muss. Daher ist $\vec{y}$ eine Lösung des Systems.

b) Falsch! Das charakteristische Polynom hat $2 \pm i$ als mindestens doppelte Nullstelle und 5 als mindestens einfache Nullstelle. Daher hat es mindestens den Grad fünf. Daher muss auch die DGL mindestens den Grad fünf haben.

c) Wahr! Die Dgl. ist von der Form:

$$y' = F(x, y) \text{ mit } F(x, y) = e^{17y^3 + \cos^6 x}(3 - y)^2.$$

Wegen $F(x, 3) = 0$ ist die konstante Funktion $y(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL, die auch die Anfangsbedingung erfüllt. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist in allen Variablen stetig differenzierbar. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz impliziert daher, dass $y(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$ die einzige (globale) Lösung des AWPs ist.

d) Falsch! Mit dem Verschiebungssatz gilt

$$e^{-3s}\mathcal{L}[e^{-t^2}](s) = \mathcal{L}[u_3(t)e^{-(t-3)^2}](s).$$

Wäre dies gleich $\mathcal{L}[e^{-(t-3)^2}](s)$, so würde mit dem Satz von Lerch folgen

$$u_3(t)e^{-(t-3)^2} = e^{-(t-3)^2},$$

was aber für alle $t \in [0, 3[$ nicht gilt.

e) Wahr!

$$u_x(x, t) = 3\cos(3x - t), \quad u_{xx}(x, t) = -9\sin(3x - t),$$

$$9u_{tt}(x, t) = -9\sin(3x - t) = u_{xx}(x, t).$$

6. Aufgabe (9 Punkte) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\omega, t) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot, t)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[-3\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(\cdot, t)\right](\omega)$$

$$= -3(i\omega)^4\mathcal{F}[u(\cdot, t)](\omega) = -3\omega^4 U(\omega, t).$$

Außerdem erhalten wir mit dem Skalierungssatz

$$U(\omega, 0) = \mathcal{F}\left[e^{-|x|/6}\right](\omega) = 6\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right](6\omega) = \frac{12}{1 + 36\omega^2}.$$

(Siehe Hinweis) Bei festem ω ist dies ein gewöhnliches AWP für $U(\omega, \cdot)$. Die allgem. Lösung der Dgl.

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\omega, t) = -3\omega^4 U(\omega, t)$$

ist

$$U(\omega, t) = A(\omega) e^{-3\omega^4 t}$$

mit Konstante $A(\omega)$, die noch von ω abhängen kann.

Mit der AB folgt :

$$A(\omega) = U(\omega, 0) = \frac{12}{1 + 36\omega^2}$$

und damit

$$U(\omega, t) = \frac{12}{1 + 36\omega^2} e^{-3\omega^4 t}.$$