Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 17/18

G. Penn-Karras 26. Februar 2018

Februar – Klausur
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen ist nur die ausgegebene oder von der ISIS-Seite heruntergeladene Laplacetabelle zugelassen. Taschenrechner und Formelsammlungen sind nicht zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe 10 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{y}.$$

2. Aufgabe 10 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösung des Anfangswertsproblems

$$y'' + 3y' - 4y = 20u_1(t),\ \ y(0) = 2,\ \ y'(0) = -3.$$

3. Aufgabe 12 Punkte

Gegeben ist das reelle Randwertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + u = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0.$$

a) Finden Sie alle Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch oder konstant sind.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$, die die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 5 + 2\cos 3x$$

erfüllt.

Hinweis: Konstruieren Sie Ihre Separationskonstante λ so, dass die DGL für X von der Form $X'' - \lambda X = 0$ ist.

Bitte 2. Blatt beachten!

4. Aufgabe

8 Punkte

Gegeben ist die folgende reelle Differentialgleichung (DGL)

$$y'' - \frac{x}{x-1}\,y' + \frac{1}{x-1}\,y = 0, \qquad x > 1.$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionen x und e^x ein Fundamentalsystem für die Lösungen dieser DGL bilden.

b) Ermitteln Sie die Lösung mit den Eigenschaften $y(2) = 4$ und $y'(2) = 3$.

5. Aufgabe

10 Punkte

Werten Sie die zwei nachfolgenden Ausdrücke aus, indem Sie Laplace- und Fourier-Transformation geeignet verwenden:

a) $$\int_0^2 \mathrm{e}^t \big(\cos(2-t) - \sin(2-t)\big)\,\mathrm{d}t$$

b) $$\mathcal{F}\left[\frac{4}{t^2 - 2t + 5}\right](\omega).$$

Eine Formel:

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \pi\mathrm{e}^{-|\omega|}.$$

Bitte wenden!

6. Aufgabe

10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte.)
Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) (2 Punkte) Das Anfangswertsproblem $\mathrm{e}^{y'} = \frac{x}{y}$, $y(1) = 2$ ist eindeutig lösbar.

b) (3 Punkte) Für zwei beliebige stetige Funktionen $f(t)$ und $g(t)$ von exponentieller Ordnung gilt eine Produktformel:
$\mathcal{L}[f(t) \cdot g(t)](s) = \mathcal{L}[f(t)](s) \cdot \mathcal{L}[g(t)](s)$.

c) (2 Punkte) Ein LTI-System mit der Impulsantwort e^{-t} liefert auf das Eingangssignal $2t\mathrm{e}^{-t}$ das Ausgangssignal $t^2\mathrm{e}^{-t}$.

d) (3 Punkte) Die Funktion $u(x,t) = \sin(x^2 + 2t)$ ist eine Lösung der reellen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x\,\frac{\partial u}{\partial t}.$$