Lösungen zur Juli-Klausur

1. Aufgabe (7+2 Punkte)

a) Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix: Charakt. Polynom:

$$\det\,(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2.$$

Wir erhalten den doppelten Eigenwert $\lambda = 3$. Eigenvektoren:

$$(A - \lambda E)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \iff v_1 = 0, \quad v_2 \text{ beliebig}$$

ergibt Eigenvektor zu $\lambda = 3$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt keinen weiteren, von $\vec{v}$ linear unabh. Eigenvektor zu $\lambda = 3$. Die algebraische Vielfachheit von λ ist aber 2. Daher suchen wir einen weiteren Hauptvektor $\vec{w}$ mit

$$(A - \lambda E)\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{w} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses System wird z. B. gelöst durch

$$\vec{w} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Fundamentalsystem:

$$\vec{x}_1(t) = e^{t\lambda}\vec{v} = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}_2(t) = e^{t\lambda} \exp\,(t[A - \lambda E])\vec{w} = e^{t\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}[A - \lambda E]^k \vec{w}$$

$$= e^{t\lambda}[\vec{w} + t(A - \lambda E)\vec{w}] = e^{t\lambda}[\vec{w} + t\vec{v}]$$

$$= e^{3t} \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^{3t} \begin{pmatrix} 1/2 \\ t \end{pmatrix},$$

(Exponentialreihe von $\exp\,(t[A - \lambda E])\vec{w}$ bricht beim Glied 2.Ordnung ab, da $[A - \lambda E]^2\vec{w} = [A - \lambda E]\vec{v} = 0$.) Allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t) + 2C_2\vec{x}_2(t)$$

$$= C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \text{ Konstanten.}$$

Bestimmung einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems durch Variation der Konstanten:

$$\vec{x}^{(p)}(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + c_2(t)\vec{x}_2(t) \text{ mit}$$

$$\dot{c_1}(t)\vec{x}_1(t) + \dot{c_2}(t)\vec{x}_2(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{c_1}(t) \\ \dot{c_2}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

führt auf:

$$\dot{c_1}(t) = 6e^{-3t} \text{ und } \dot{c_2}(t) = 0$$

Integration ergibt (Integrationskonstanten können hier weggelassen werden, da nur **eine spezielle** Lösung gesucht ist)

$$c_1(t) = -2e^{-3t} \text{ und } c_2(t) = 0.$$

Wir erhalten als spezielle Lösung

$$\vec{x}^{(p)}(t) = c_1(t)\vec{x}_1(t) + c_2(t)\vec{x}_2(t) = -2e^{-3t}\vec{x}_1(t) = -2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \vec{x}^{(p)}(t) + C_1\vec{x}_1(t) + C_2 2\vec{x}_2(t) \\ &= -2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \text{ Konstanten.} \end{aligned}$$

b) Zur Lösung des Anfangswertproblems sind die Konstanten C_1, C_2 in der Lösung des homogenen Systems aus (a) so zu bestimmen, dass die Anfangsbedingung erfüllt wird, d.h.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{x}(0) = C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses System hat die eindeutige Lösung $C_1 = 4, C_2 = 3$. Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit

$$\vec{x}(t) = 4e^{3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe (5+4 Punkte)

a) Es gilt

$$y_1(t) = \cos 2t = \mathrm{Re}\{e^{2it}\}.$$

Daraus kann geschlossen werden, dass

$$\lambda_1 = 2i$$

(mindestens) einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Dgl. sein muss. Dann ist aber auch

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -2i$$

einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Aus der Lösung $y_2(t) = te^{-t}$ kann geschlossen werden, dass

$$\lambda_3 = -1$$

mindestens doppelte (wg. des Faktors t) Nullstelle des charakteristischen Polynoms der Dgl. sein muss. Wir setzen für das charakteristische Polynom an

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)^2 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i)(\lambda + 1)^2$$

$$= (\lambda^2 + 4)(\lambda + 1)^2 = (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 + 8\lambda + 4.$$

Dies entspricht der homogenen Dgl.

$$y'''' + 2y''' + 5y'' + 8y' + 4y = 0.$$

Die Dgl. hat die komplexen Lösungen

$$z(t) = e^{2it}, \quad w_1(t) = e^{-t} \text{ und } w_2(t) = te^{-t}.$$

Als reelles Fundamentalsystem erhalten wir

$$x_1(t) = \mathrm{Re}\{z(t)\} = \cos 2t, \quad x_2(t) = \mathrm{Im}\{z(t)\} = \sin 2t,$$

$$x_3(t) = e^{-t}, \quad x_4(t) = te^{-t}.$$

Damit ergibt sich für die allgemeine Lösung der homogenen Dgl.:

$$y_h(t) = \sum_{k=1}^{4} C_k x_k(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + C_3 e^{-t} + C_4 te^{-t}.$$

b) Die Teilinhomogenität $f_1(t) = te^t$ ist von der Form

$$f_1(t) = P(t)e^{\mu_1 t} \text{ mit einem Polynnom ersten Grades } P.$$

Zunächst ist $\mu_1 = 1$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Für die Teilinhomogenität te^t lautet damit der Ansatz für eine dazugehörige spezielle Lösung:

$$y_{p,1}(t) = Q(t)e^{\mu_1 t} = Q(t)e^t,$$

wobei Q ein Polynom ersten Grades ist, also

$$y_{p,1}(t) = (At + B)e^t.$$

Nach (a) ist $\mu_2 = 2i$ einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms, d.h. die Teilinhomogenität $f_2(t) = \sin 2t$ ist eine Lösung der homogenen Dgl. Somit lautet der Ansatz für eine dazugehörige spezielle Lösung:

$$y_{p,2}(t) = Ct \cos 2t + Dt \sin 2t,$$

Insgesamt erhalten wir eine spezielle Lösung

$$y_p(t) = y_{p,1}(t) + y_{p,2}(t) = (At + B)e^t + Ct \cos 2t + Dt \sin 2t.$$

3. Aufgabe (7+4 Punkte)

a) Der Integralterm ist die Faltung zwischen e^{2t} und y bzw. f. Die Anwendung der Laplace-Transformation auf die Integrodifferentialgleichung ergibt mit dem Faltungssatz:

$$\mathcal{L}\left(y' + y * e^{2t}\right)(s) = s\mathcal{L}[y](s) - y(0) + \mathcal{L}[y](s) \cdot \mathcal{L}[e^{2t}](s)$$

$$= \mathcal{L}[y](s)\left(s + \frac{1}{s-2}\right) = \mathcal{L}[f * e^{2t}](s) = \frac{1}{s-2}\mathcal{L}[f](s).$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s-2)\left(s + \frac{1}{s-2}\right)}\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^2 - 2s + 1}\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{(s-1)^2}\mathcal{L}[f](s).$$

Speziell für $f(t) = 4e^t$ haben wir

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s-1)^2}\mathcal{L}[4e^t](s) = \frac{4}{(s-1)^3}.$$

Rücktransformation ergibt:

$$y(t) = 2t^2 e^t.$$

b) Mit Teil (a) und der Übertragungsfunktion G gilt:

$$G(s)\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{(s-1)^2}\mathcal{L}[f](s),$$

damit

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Für die Impulsantwort g und die Übertragungsfunktion gilt:

$$\mathcal{L}[g](s) = G(s) = \frac{1}{(s-1)^2},$$

damit

$$g(t) = te^t.$$

4. Aufgabe (8 Punkte) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\omega, t) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot, t)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial^6}{\partial x^6}u(\cdot, t)\right](\omega)$$

$$= (i\omega)^6 \mathcal{F}[u(\cdot, t)](\omega) = -\omega^6 U(\omega, t).$$

Außerdem haben wir als Anfangsbedingung

$$U(\omega, 0) = \mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}.$$

(Siehe Hinweis) Bei festem ω ist dies ein gewöhnliches AWP für $U(\omega, \cdot)$. Die allgem. Lösung der Dgl.

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\omega, t) = -\omega^6 U(\omega, t)$$

ist

$$U(\omega, t) = A(\omega) e^{\int (-\omega^6) dt} = A(\omega) e^{-t\omega^6}$$

mit Konstante $A(\omega)$, die noch von ω abhängen kann.
Mit der AB folgt :

$$A(\omega) = U(\omega, 0) = \frac{2}{1+\omega^2},$$

und damit

$$U(\omega, t) = \frac{2}{1+\omega^2} e^{-t\omega^6}.$$

5. Aufgabe (8+3 Punkte)

a) Einsetzen des Produktansatzes $u(x,t) = F(x)G(t)$ in Dgl. ergibt

$$F(x)G'(t) = u_t(x,t) = (\sin t) u_{xx}(x,t) = (\sin t) F''(x) G(t),$$

damit

$$\frac{G'(t)}{(\sin t) G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad (\text{ Konstante }),$$

d.h.

$$F''(x) = \lambda F(x), \quad G'(t) = (\sin t) \lambda G(t).$$

Einsetzen in die (homognen) Randbedingungen ergibt

$$0 = u(0,t) = F(0)G(t) \text{ und } 0 = u(\pi, t) = F(\pi)G(t).$$

Dies fürt auf die Randbedingungen für F:

$$F(0) = F(\pi) = 0.$$

(Sonst müsste $G(t)$ für alle t Null sein, was nur die triviale Lösung zulässt.)
Das RWP

$$F''(x) = \lambda F(x), \quad F(0) = F(\pi) = 0$$

hat im Falle $\lambda \geq 0$ nur die tiviale Lösung $F = 0$. (Begründung nicht erforderlich.)
Im Falle $\lambda < 0$ ergibt sich als allgemeine Lösung der Gleichung für F:

$$F(x) = A \cos(\sqrt{-\lambda} x) + B \sin(\sqrt{-\lambda} x).$$

Einsetzen in die homognen Randbedingungen ergibt

$$0 = F(0) = A \text{ und } 0 = F(\pi) = A\cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + B\sin(\sqrt{-\lambda}\pi)).$$

Dies wird für $A = 0$ und $\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$ erfüllt. $\sqrt{-\lambda}$ muss also ganzzahlig sein, damit erhalten wir

$$\sqrt{-\lambda} = n, \text{ d.h } \lambda = -n^2.$$

Somit gilt

$$F(x) = B\sin nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für G ergibt sich

$$G'(t) = (\sin t)\lambda G(t) = -n^2(\sin t)G(t).$$

Wir erhalten die allgemeine Lösung

$$G(t) = Ce^{-n^2\int(\sin t)dt} = Ce^{n^2\cos t},$$

und damit als Lösungen

$$u(x,t) = F(x)G(t) = Ce^{n^2\cos t}B\sin nx = ae^{n^2\cos t}\sin nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

mit neuer Konstanten $a = CB$.

b) Durch Überlagerung dieser Lösungen erhalten wir wieder eine Lösung der Dgl. mit den homognen Randbedingungen :

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{n^2\cos t}\sin nx.$$

Mit der Anfangsbedingung für u folgt

$$7\sin 3x - 2\sin 6x = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(n^2)}\sin nx.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$a_3e^{(3^2)} = 7 \text{ und } a_6e^{(6^2)} = -2, \text{ sonst } a_k = 0.$$

Damit lautet die Lösung des AWP

$$u(x,t) = 7e^{9(\cos t-1)}\sin 3x - 2e^{36(\cos t-1)}\sin 6x.$$

6. Aufgabe (12 Punkte)

a) Wahr! Mit dem Faltungs-und Ableitungsatz folgt

$$\mathcal{F}\left[t(f*g)\right](\omega) = i\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\left[f*g\right](\omega) = i\frac{d}{d\omega}\left(\mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[g](\omega)\right)$$

$$= i\left(\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[f](\omega)\right)\mathcal{F}[g](\omega) + i\mathcal{F}[f](\omega)\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}[g](\omega)$$

$$= \mathcal{F}[tf(t)](\omega)\mathcal{F}[g](\omega)+\mathcal{F}[f](\omega)\mathcal{F}[tg(t)](\omega) = \mathcal{F}[tf(t)*g(t)](\omega)+\mathcal{F}[f(t)*(tg(t)](\omega).$$

$$= \mathcal{F}[tf(t)*g(t) + f(t)*(tg(t)](\omega).$$

Damit folgt die Behauptung.

b) Falsch! Mit dem Verschiebungssatz folgt:

$$\mathcal{L}[tu_3(t)](s) = \mathcal{L}[(t-3)u_3(t)](s) + 3\mathcal{L}[u_3(t)](s)$$

$$= e^{-3s}\mathcal{L}[t](s) + 3e^{-3s}\mathcal{L}[1](s) = e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}\right)$$

und nicht die auf dem Blatt angegebene Funktion.

c) Wahr! Das System ist von der Form:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(t,\vec{x}) \quad t\in\mathbb{R}, \quad \vec{x}\in\mathbb{R}^2.$$

Hier ist $\vec{F}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$\vec{F}(t,\vec{x}) = \begin{pmatrix}\cos x_2\\ \sin x_1\end{pmatrix}$$

in allen Variablen stetig differenzierbar. Ausserdem ist die konstante Funktion

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix}\pi\\ \pi/2\end{pmatrix}, \quad t\in\mathbb{R}$$

eine Lösung, da

$$\vec{F}(t,\pi,\pi/2) = \begin{pmatrix}\cos(\pi/2)\\ \sin\pi\end{pmatrix} = \vec{0} \text{ für alle } \quad t\in\mathbb{R}.$$

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz impliziert daher, dass $\vec{x}$ die einzige (auf $\mathbb{R}$ definierte) Lösung des AWPs ist.

d) Falsch! Wegen $e^{\sin u}\neq 0$ für alle $\quad u\in\mathbb{R}$ ist die konstante Funktion $y(x)=0$, $x\in\mathbb{R}$ keine Lösung der DGL.