**Musterlösung Klausur ITPDG vom 18. Februar 2019**

## 1. Aufgabe

9 Punkte

Mit $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ hat man im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned} s^2Y - s - 2 + 4Y &= 5\mathrm{e}^{-3s}\frac{1}{s+1} \\ (s^2+4)Y &= s + 2 + 5\mathrm{e}^{-3s}\frac{1}{s+1} \\ Y &= \frac{s+2}{s^2+4} + \mathrm{e}^{-3s}\frac{5}{(s^2+4)(s+1)} \end{aligned}$$

Mit dem gegebenen Hinweis ist

$$Y(s) = \frac{s+2}{s^2+4} + \mathrm{e}^{-3s}\left(\frac{1}{s+1} + \frac{-s+1}{s^2+4}\right),$$

nach Rücktransformation ergibt sich die Lösung

$$y(t) = \cos 2t + \sin 2t + u_3(t)\left(\mathrm{e}^{-(t-3)} - \cos 2(t-3) + \frac{1}{2}\sin 2(t-3)\right).$$

## 2. Aufgabe 10 Punkte

Das Integral lässt sich als Faltung lesen:

$$\frac{1}{1+4t^2} * f(t) = \frac{1}{1+(t+1)^2}$$

Es ist zunächst

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4t^2}\right](\omega) &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+(2t)^2}\right](\omega)\\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]\left(\frac{\omega}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{|\omega|}{2}}.\end{aligned}$$

Mit $F(\omega) := \mathcal{F}[f](\omega)$ hat man im Frequenzbereich:

$$\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\frac{|\omega|}{2}} \cdot F(\omega) = \pi \mathrm{e}^{-|\omega|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$$

also

$$F(\omega) = 2\mathrm{e}^{-\frac{|\omega|}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}$$

So etwas Ähnliches haben wir schon oben erhalten. Wir können als Lösung der Integralgleichung anbieten:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{1+4(t+1)^2}.$$

## 3. Aufgabe

8 Punkte

Mit $Y(z) := \mathcal{Z}[(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}](z)$ hat man im $z$-Bereich

$$(z^2Y - 2z^2 - 3z) - 5(zY - 2z) + 6Y = 0$$
$$\Longrightarrow \; (z^2 - 5z + 6)Y = 2z^2 - 7z \; \Longrightarrow \; Y(z) = \frac{z(2z-7)}{(z-2)(z-3)}.$$

Mit der Partialbruchzerlegung

$$Y(z) = z\frac{2z-7)}{(z-2)(z-3)} = z\left(\frac{3}{z-2} - \frac{1}{z-3}\right) = 3\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-3}$$

gelangen wir wieder in den Folgenbereich zurück: Die vorgelegte Differenzengleichung wird durch

$$y_k = 3 \cdot 2^k - 3^k$$

gelöst.

## 4. Aufgabe

10 Punkte

Charakteristisches Polynom

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 4 & -2-\lambda & 0 \\ 8 & -4 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda)(-4-\lambda) - (-4-\lambda)(-1)4$$
$$= (-4-\lambda)\left((\lambda-2)(\lambda+2)+4\right) = (-4-\lambda)\lambda^2,$$

woraus sich der einfache Eigenwert $-4$ und der doppelte Eigenwert $0$ ergeben.

Der Eigenraum zum einfachen Eigenwert $-4$:

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = v_2 = 0,\ v_3 \text{ beliebig} \implies \text{Eigenraum: span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum doppelten Eigenwert $0$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_2 = 2v_1,\ v_3 = 0,\ v_1 \text{ beliebig} \implies \text{Eigenraum: span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Der Eigenraum ist nur eindimensional. Wir suchen einen weiteren (linear unabhängigen) Hauptvektor. Aus

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

findet man mit etwas Gucken:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Allgemein:

$$h = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir die verlangte allgemeine Lösung:

$$\vec{y}(t) = C_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

## 5. Aufgabe

12 Punkte

a) Mit $u(x,t) = X(x)T(t)$ hat man nach Division durch $XT$:

$$\frac{X''}{X} - 3\frac{T'}{T} + 1 = 0.$$

Separation:

$$\frac{X''}{X} = \lambda, \quad -3\frac{T'}{T} + 1 = -\lambda.$$

Differentialgleichungen:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad T' - \frac{1+\lambda}{3}T = 0.$$

Damit $X$ periodisch und nicht-konstant ist, muss $\lambda < 0$ erfüllt werden. Dann hat man

$$X(x) = C_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \sin(x\sqrt{-\lambda})$$

Aus $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ folgt $X(0) = X(\pi) = 0$. Hier ergibt sich $C_1 = 0$ und

$$C_2 \sin(\pi\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Wenn $C_2 \neq 0$ möglich sein soll, muss gelten

$$\pi\sqrt{-\lambda} = k\pi, \ k \in \mathbb{N}, \ k > 0.$$

d. h. $\lambda$ ist von der Form $-k^2$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, und $X(x)$ proportional zu $\sin kx$.

Die DGL für $T$ lautet dann mit $\lambda = -k^2$:

$$T' - \frac{1-k^2}{3}T = 0.$$

$T(t)$ ist von der Form

$$\mathrm{e}^{\frac{1-k^2}{3}t}.$$

Alles zusammensetzen ergibt, dass die gesuchten Lösungen $u$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ durch

$$u(x,t) = A\mathrm{e}^{\frac{1-k^2}{3}t} \sin kx$$

mit $A \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ gegeben sind.

b) Superposition:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mathrm{e}^{\frac{1-k^2}{3}t} \sin kx$$

Die $A_k$ sind so zu finden, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = 4 \sin x + \sin 4x,$$

also $A_1 = 4$, $A_4 = 4$ und $A_l = 0$ für sonstige Werte von $l$.

Damit besitzen wir eine Lösung des vorgelegten Randwertproblems, nämlich

$$u(x,t) = 4 \sin x + \mathrm{e}^{-5t} \sin 4x.$$

## 6. Aufgabe

11 Punkte

a) (2 Punkte) Wahr.
Eine stetige Funktion ist auch stückweise stetig. Eine beschränkte Funktion ist auch von exponentieller Ordnung. Eine stetige und beschränkte Funktion erfüllt damit die Generalvoraussetzung und hat folglich eine Laplacetransformierte.

b) (2 Punkte) Falsch.
Mit

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|t|}\right](\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

findet man, dass die Fouriertransformierte $F(\omega)$ stets positiv ist und somit keinesfalls außerhalb eines beschränkten Intervalls im Frequenzbereich verschwindet. $f$ ist nicht von endlicher Bandbreite.

c) (2 Punkte) Falsch.

$\alpha$) Die Wronski-Determinante dieser Funktionen verschwindet an der Stelle 0:

$$\left.\begin{vmatrix} \cos 2t & \cos^2 t - \sin^2 t \\ -2\sin 2t & -2\cos t \sin t - 2\sin t \cos t \end{vmatrix}\right|_{t=0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

damit sind sie nach dem Satz von Wronski linear abhängig.

$\beta$) Es gilt $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$, damit sind diese beiden Funktionen identisch. Weil die DGL von 2. Ordnung ist, besteht ein Fundamentalsystem aus zwei linear unabhängigen Lösungen. Wegen $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ sind diese „zwei“ Funktionen gleich, also insbesondere linear abhängig und darum kein Fundamentalsystem.

d) (3 Punkte) Wahr.
Diese DGL explizit geschrieben:

$$y' = 2\mathrm{e}^{-y} - 1 =: F(x, y)$$

Die $\mathbb{R}^2$-Funktion $F(x, y) = 2\mathrm{e}^{-y} - 1$ ist auf der offenen Menge $\mathbb{R}^2$ definiert und dort überall stetig differenzierbar, denn überall existieren die Ableitungen

$$F_x(x, y) = 0, \quad F_y(x, y) = -2\mathrm{e}^{-y}$$

existieren und sind stetig. Der Anfangspunkt $(3, \ln 2)$ liegt in der offenen Menge $\mathbb{R}^2$.

Damit existiert nach dem EES auf ganz $\mathbb{R}^2$ genau eine maximale Lösung.

$y(x) = \ln 2, \ x \in \mathbb{R}$

e) (2 Punkte) Wahr.
Es ist mit $u(x, t) = X(x) + T(t)$ in der Tat

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial x} T'(t) = 0.$$