Musterlösung Klausur ITPDG vom 01. April 2019

1. Aufgabe 10 Punkte

Mit $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ hat man im Laplace-Bereich

$$\begin{aligned}(s^2Y - s - 3) - Y &= 2\mathrm{e}^{-4s}\\ (s^2-1)Y &= s + 3 + 2\mathrm{e}^{-4s}\\ Y = \frac{s+3}{s^2-1} + \mathrm{e}^{-4s}\cdot\frac{2}{s^2-1} &= \frac{s+3}{(s-1)(s+1)} + \mathrm{e}^{-4s}\cdot\frac{2}{(s-1)(s+1)}\end{aligned}$$

Mit der Zuhaltemethode sind die beiden Summanden schnell vereinfacht:

$$Y(s) = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s+1} + \mathrm{e}^{-4s}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right).$$

Nach Rücktransformation ergibt sich die Lösung

$$y(t) = 2\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t} + u_4(t)\left(\mathrm{e}^{t-4} - \mathrm{e}^{-(t-4)}\right).$$

2. Aufgabe

8 Punkte

Mit $Y(z) := \mathcal{Z}[(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}](z)$ und mit $-2 = -2\cdot 1^k$ hat man im z-Bereich

$$(zY - 2z) - 3Y = -\frac{2z}{z-1}$$

$$\Longrightarrow\ (z-3)Y = 2z - \frac{2z}{z-1} \ \Longrightarrow\ Y(z) = \frac{2z}{z-3} - \frac{2z}{(z-3)(z-1)}$$

Mittels Partialbruchzerlegung findet man

$$Y(z) = 2\frac{z}{z-3} - z\left(\frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-1}\right) = \frac{z}{z-3} + \frac{z}{z-1}$$

und gelangt sodann in den Folgenbereich zurück: Die vorgelegte Differenzengleichung wird durch

$$y_k = 3^k + 1$$

gelöst.

3. Aufgabe

10 Punkte

a) Die DGL ist trennbar: Sie ist von der Form

$$y' = F(x)G(y),\ F(x) = -2x,\ G(y) = \mathrm{e}^{-y}$$

.

G hat keine Nullstelle. Damit gibt es keine konstanten Lösungen.

Ansonsten hat man im TdV-Schema

$$\begin{aligned} \int (-2x)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y \\ -x^2 + C &= \mathrm{e}^y \qquad C \in \mathbb{R} \\ \ln(-x^2 + C) &= y \qquad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Man findet in Abhängigkeit von C die Lösung

$$y = \ln(-x^2 + C)$$

Für jedes $C > 0$ ist der maximale Definitionsbereich das offene Intervall $]-\sqrt{C}, \sqrt{C}[$ und damit stets eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$. Es gibt keine Lösungen, die auf ganz $\mathbb{R}$ erklärt sind.

b) Anpassen an $y(0) = 2$:

$$\begin{aligned} 2 &= \ln C \\ C &= \mathrm{e}^2 \end{aligned}$$

Man findet also die Lösung

$$\ln\left(-x^2 + \mathrm{e}^2\right) = y$$

mit dem maximalen Definitionsbereich $]-\mathrm{e}, \mathrm{e}[$. Im Sinne des EES im Skript ist $G(x, y) = -2x\mathrm{e}^{-y}$. G ist im Punkt $(0, 2)$ (und sogar überall in $\mathbb{R}^2$) stetig differenzierbar. Damit gibt es genau eine Lösung des AWP, und wir haben sie bereits gefunden. Es gibt keine weiteren Lösungen des AWP.

4. Aufgabe

10 Punkte

Charakteristisches Polynom

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 & 8 \\ -1 & -\lambda & -4 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-\lambda)(-2-\lambda) - ((-2-\lambda)\cdot 4 \cdot (-1))$$

$$= (-2-\lambda)\left(-(4-\lambda)\lambda - (-4)\right) = (-2-\lambda)\left(-4\lambda + \lambda^2 + 4\right) = -(\lambda+2)(\lambda-2)^2$$

woraus sich der einfache Eigenwert -2 und der doppelte Eigenwert 2 ergeben.

Der Eigenraum zum einfachen Eigenwert -2:

$$\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

Der Eigenraum zum doppelten Eigenwert 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_3 = 0,\ v_1 = -2v_2,\ v_2 \text{ beliebig}$$

$$\implies \text{Eigenraum: span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Der Eigenraum ist nur eindimensional. Wir suchen einen weiteren (linear unabhängigen) Hauptvektor. Aus

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

findet man mit etwas Gucken:

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{0.1}$$

Allgemein:

$$h = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir die verlangte allgemeine Lösung:

$$\vec{y}(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \mathrm{e}^{2t} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

5. Aufgabe

12 Punkte

a) Man macht folgende Fallunterscheidung:

$\alpha > 0$: $y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x\sqrt{\alpha}} + C_2 \mathrm{e}^{-x\sqrt{\alpha}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$\alpha = 0$: $y(x) = C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$\alpha < 0$: $y(x) = C_1 \cos(x\sqrt{-\alpha}) + C_2 \sin(x\sqrt{-\alpha}), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Nur für $\alpha < 0$ gibt es periodische und nicht-konstante Lösungen. Sie sind Linearkombinationen von $\cos(x\sqrt{-\alpha})$ und $\sin(x\sqrt{-\alpha})$.

b) (i) Mit $u(x,t) = X(x)T(t)$ hat man nach Division durch XT:

$$\frac{X''}{X} - \frac{1}{2}\frac{T''}{T} = 0.$$

Separation:

$$\frac{X''}{X} = \lambda, \quad \frac{1}{4}\frac{T''}{T} = \lambda.$$

Differentialgleichungen:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad T'' - 4\lambda T = 0.$$

Damit X periodisch und nicht-konstant ist, muss laut der Teilaufgabe a) von $\lambda < 0$ erfüllt werden. Dann hat man mit dem anderen Ergebnis aus Teilaufgabe a)

$$X(x) = C_1 \cos(x\sqrt{-\lambda}) + C_2 \sin(x\sqrt{-\lambda})$$

Aus $u(0,t) = u(2\pi,t) = 0$ folgt $X(0) = X(2\pi) = 0$. Hier ergibt sich $C_1 = 0$ und

$$C_2 \sin(2\pi\sqrt{-\lambda}) = 0.$$

Wenn $C_2 \neq 0$ möglich sein soll, muss gelten

$$2\pi\sqrt{-\lambda} = k\pi, \ \ k \in \mathbb{N}, \ \ k > 0.$$

d. h. λ ist von der Form $-\frac{1}{4}k^2$ mit $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$, und $X(x)$ proportional zu $\sin \frac{k}{2}x$.

Die DGL für T lautet dann mit $\lambda = -\frac{1}{4}k^2$:

$$T'' + k^2 T = 0.$$

$T(t)$ ist – wiederum mit Teilaufgaba a) – von der Form

$$C_3 \cos kt + C_4 \sin kt$$

Aus $u(x,0) = X(x)T(0) = 0$ ergibt sich $T(0) = 0$. Damit ist $C_3 = 0$. $T(t)$ ist proportional zu $\sin kt$. Alles zusammensetzen ergibt, dass die gesuchten Lösungen u der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$ durch

$$u(x,t) = A \sin kt \sin \frac{k}{2} x$$

mit $A \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 0$ gegeben sind.

(ii) Superposition:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kt \sin \frac{k}{2} x$$

Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} k A_k \sin \frac{k}{2} x$$

Die A_k sind so zu finden, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} k A_k \sin \frac{k}{2} x = 4 \sin x + 24 \sin 4x,$$

also $A_2 = 2$, $A_8 = 3$ und $A_l = 0$ für sonstige Werte von l.

Damit besitzen wir eine Lösung des vorgelegten Randwertproblems, nämlich

$$u(x,t) = 2 \sin 2t \sin 2x + 3 \sin 8t \sin 4x.$$

6. Aufgabe

10 Punkte

a) Wahr.
Wegen $-\sqrt{t} \leqslant 0$ gilt $f(t) \leqslant 1$. Mit $C = 1$ und $\gamma = 0$ hat man $|f(t)| \leqslant C\mathrm{e}^{\gamma t}$.
f ist somit von exponentieller Ordnung.

b) Wahr.
Das LTI-System hat die Übertragungsfunktion $H(s) = \frac{2}{s^2}$. Für die Laplace-Transformierte $A(s)$ ergibt sich

$$A(s) = \mathcal{L}[e(t)](s) \cdot H(s) = \frac{3}{s^2} \cdot \frac{2}{s^2} = \frac{6}{s^4},$$

also in der Tat $a(t) = t^3$.

c) Wahr. Man hat

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{1+4t^2}\right](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{1+(2t)^2}\right](\omega) = \frac{\pi}{2}\mathrm{e}^{-\left|\frac{\omega}{2}\right|}.$$

d) Wahr.
Mit

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{si} * r_1\right](\omega) = 2\pi r_1(\omega)\,\mathrm{si}(\omega)$$

findet man, dass die Fouriertransformierte $F(\omega)$ für $|\omega| > 1$ verschwindet.
f ist von endlicher Bandbreite.

e) Falsch.
Setzt man $J_4(x) = ax + b$ in die Bessel-Differentialgleichung ein, so erhält man

$$x^2 J_4''(x) + x J_4'(x) + (x^2 - 16) J_4(x) = 0 + x(ax+b) + (x^2-16)(ax+b) = x^3 + \ldots = 0,$$

d.h. ein kubisches Polynom ist gleich dem Nullpolynom. Widerspruch.