Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 20/21
G. Penn-Karras 8. April 2021

April – Klausur
Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Durch die Teilnahme an der Klausur erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Zur Bearbeitung der Klausuraufgaben sind eigene Aufzeichnungen und Materialien zugelassen. Die Rechenwege sind ausführlich darzustellen. Die Lösungen sind handschriftlich auf DIN-A4-Blättern anzufertigen und anschließend als pdf hochzuladen.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Die Klausur ist mit 30 von 60 Punkten bestanden.

---

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben ist das Anfangswertsproblem (AWP)

$$y' + (2x+1)y^2 = 0, \quad y(0) = -\tfrac{1}{6}.$$

a) Ermitteln Sie für dieses AWP eine maximal fortgesetzte Lösung. Bestimmen Sie insbesondere das Definitionsintervall dieser Lösung.

b) Zeigen Sie, dass Ihre ermittelte Lösung die einzige Lösung des AWPs ist.

2. Aufgabe

9 Punkte

Ermitteln Sie mit Hilfe der $\mathcal{Z}$-Transformation eine Zahlenfolge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit den zwei Eigenschaften

$$y_{k+1} - 2y_k = -k + 1, \; y_0 = 1.$$

Hinweise: Es gilt für $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$:

$$\mathcal{Z}\left[(a^k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right](z) = \mathcal{Z}\left[(1, a, a^2, a^3, \ldots)\right](z) = \frac{z}{z-a}.$$

Es gilt

$$\mathcal{Z}\left[(k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right](z) = \frac{z}{(z-1)^2}.$$

Bitte zu den Aufgaben 3-6 wenden!

3. Aufgabe 12 Punkte

Ermitteln Sie im $\mathbb{R}^3$ die allgemeine Lösung $\vec{y}(t)$ des DGL-Systems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 5 \end{pmatrix} \vec{y}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben ist das reelle Randwertproblem für eine Funktion $u(x,t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} + 9u = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad 0 < t\,;$$

$$u(0,t) = u(\tfrac{\pi}{2}, t) = 0, \qquad 0 < t\,.$$

a) Finden Sie alle nichttrivialen Lösungen $u(x,t)$ der Form $u(x,t) = X(x)T(t)$. Hierbei können Sie ohne Beweis verwenden, dass die Funktionen $X(x)$ periodisch und nicht-konstant sind.

b) Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x,t)$ mit der Eigenschaft

$$u(x,0) = 5\sin 2x + 3\sin 4x.$$

5. Aufgabe 10 Punkte

Von einem LTI-System $\mathcal{S}$ ist bekannt, dass es auf das Eingangssignal $e_1(t) = \mathrm{e}^t$ mit dem Ausgangssignal $a_1(t) = \mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^t$ antwortet.

a) Berechnen Sie die Impulsantwort des Systems $\mathcal{S}$.

b) Ermitteln Sie die Systemantwort auf das Eingangssignal $e_2(t) = \mathrm{e}^{4t}$.

Eine Laplace-Tabelle finden Sie auf der letzten Seite.

Bitte zur Aufgabe 6 wenden!

6. Aufgabe 10 Punkte

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an.
(Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte. Antworten ohne Begründung geben keine Punkte.)

Antworten Sie bitte *nur* auf Ihren Lösungsblättern!

a) (3 Punkte) Die Laplace-Rücktransformierte der Funktion $\frac{1}{(s-2)^2}\mathrm{e}^{-s}$ ist die Funktion $(t-1)\mathrm{e}^{2(t-1)}u_1(t)$ im Zeitbereich.

b) (3 Punkte) Die Gleichung

$$\mathcal{F}\left[\mathrm{e}^{-|3t|}\right](\omega) = \frac{1}{3}\mathcal{F}\left[e^{|t|}\right](\omega)$$

ist aufgrund des Multiplikationssatzes eine wahre Aussage.

c) (4 Punkte) Die aus den Besselfunktionen $J_3(x)$ und $J_4(x)$ gebildete Linearkombination $J_3(x) + J_4(x)$ löst die Besselsche Differentialgleichung

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

mit $n = 5$.

Auf der nächsten Seite finden Sie eine Laplace-Tabelle.

Laplace-Tabelle

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^a,\ a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\delta(t-t_0)$ bzw. $\delta(t)$	e^{-st_0} bzw. 1
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!},\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\frac{t^{\beta-1}e^{at}}{\Gamma(\beta)},\ \beta > 0$	$\frac{1}{(s-a)^\beta}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{bt}\sin at$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\cos at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{bt}\sinh at$	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$
$e^{bt}\cosh at$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$
$t\sin at$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t\cos at$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$\int_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$