Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Dozent: W. van Zuijlen

Sommersemester 2021
20. Juli 2021

Modulprüfung

Integraltransformationen und Partielle Differentialgleichungen

Durch die Teilnahme an der Klausur erklären Sie, dass

- Ihnen die für diese Prüfung relevanten Zulassungsvoraussetzungen aus der StuPO bekannt sind. Ihnen ist außerdem bewusst, dass ihre Nichterfüllung zur Ungültigkeit der Prüfung führen kann (§39 Abs. 2 Satz 4 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass die Teilnahme an der Prüfung eine ordnungsgemäße Anmeldung voraussetzt, andernfalls die Prüfung nicht gültig ist (§39 Abs. 2 AllgStuPO);
- Ihnen bekannt ist, dass eine Prüfung, die unter bekannten und bewusst in Kauf genommenen gesundheitlichen Beeinträchtigungen abgelegt wird, grundsätzlich Gültigkeit hat.

Zur Bearbeitung der Klausuraufgaben sind eigene Aufzeichnungen und Materialien zugelassen. Die Rechenwege sind ausführlich darzustellen. Die Lösungen sind handschriftlich auf DIN-A4-Blättern anzufertigen und anschließend als pdf hochzuladen.

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.

Bei der Klausur sind 60 Punkte erreichbar. Die Klausur ist mit 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante.

a) [3 Punkte] Leiten Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$t^2 T'(t) = \lambda T(t) \qquad (t > 0).$$

her.

Zur Kontrolle: Sie sollten $T(t) = ce^{-\frac{\lambda}{t}}$ finden.

b) [3 Punkte] Leiten Sie die allgemeine Lösung der Gleichung

$$t^2 T'(t) = \lambda T(t)^2 \qquad (t > 0)$$

her.

2. Aufgabe (8 Punkte)

Ermitteln Sie mit Hilfe der Laplace-Transformation jeweils die Lösung der Anfangswertproblem

$$y'' = 6y' - 9y + \delta_3, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3.$$

wobei δ_3 die in 3 zentrierte Dirac-Distribution ist.
Hinweis: Eine Laplace-Tabelle finden Sie auf der letzten Seite der Klausur.

3. Aufgabe (14 Punkte)

Gegeben ist das reelle Randwertproblem für eine Funktion $u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - t^2 \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \qquad t > 0. \tag{2}$$

a) [10 Punkte] Finden Sie alle nichttrivialen Lösungen $u(x, t)$ der Form $X(x)T(t)$, also die sowohl (1) und (2) erfüllen.

(Hinweis: Sie dürfen das Ergebnis der anderen Aufgaben benutzen.)

b) [4 Punkte] Ermitteln Sie durch Superposition eine Lösung $u(x, t)$ mit der Eigenschaft

$$u(x, 1) = 3\sin(2x) + \sin(5x).$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

Ermitteln Sie eine Lösung der Integralgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{1}{1 + (t - u - 1)^2} \, \mathrm{d}u = \frac{1}{4 + t^2}$$

unter der Annahme, dass f eine Fouriertransformierte besitzt.
Hinweis: Sie dürfen die aus der Vorlesung bekannten Fouriertransformierten benutzen:

$$\mathcal{F}[e^{-t^2/2}](\omega) = \sqrt{2\pi} e^{-\omega^2/2},$$

$$\mathcal{F}[e^{-|t|}](\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}, \qquad \mathcal{F}\left[\frac{1}{1 + t^2}\right](\omega) = \pi e^{-|\omega|},$$

$$\mathcal{F}[r_T(t)](\omega) = \mathrm{si}(\omega T) \qquad \mathcal{F}[\mathrm{si}(tT)](\omega) = 2\pi r_T(\omega).$$

5. Aufgabe (12 Punkte)

a) [6 Punkte] Finde Sie eine reelle Lösungsbasis für die homogene Differentialgleichung

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \vec{x},$$

wobei Sie benutzen dürfen dass

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -i-3 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 2 \\ -i-3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ i-3 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 2 \\ i-3 \end{pmatrix}.$$

b) [6 Punkte] Gegeben sei eine Lösungsbasis

$$e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

des homogenen Differentialgleichungssystems

$$\vec{x}_H' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}_H.$$

Finden Sie eine partikuläre Lösung des inhomogenen Systems

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

6. Aufgabe (10 Punkte)

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, und geben Sie dabei jeweils eine Begründung an. (Jede richtige und vollständig begründete Antwort gibt die jeweils angegebenen Punkte.)

a) [2 Punkte] Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq \pi \\ \sin(t) & \text{für } \pi < t, \end{cases}$$

ist stetig.

b) [3 Punkte] Die Funktion f aus a) ist von exponentieller Ordnung.

c) [2 Punkte] Die Funktion $e^{-4|t|}$ ist von endlicher Bandbreite.

d) [3 Punkte] Sei f eine S-Funktion, die außerhalb $[-T, T]$ gleich null ist, also $f(t) = 0$ für $t \notin [-T, T]$. Dann ist

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}[f]\left(-k\frac{\pi}{T}\right) \operatorname{si}(k\pi + \omega T).$$

Gesamtpunktzahl: 60 Punkte

Laplace-Tabelle

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$t^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^a,\ a > -1$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\delta(t-t_0)$ bzw. $\delta(t)$	e^{-st_0} bzw. 1
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!},\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{(s-a)^n}$
$\frac{t^{\beta-1}e^{at}}{\Gamma(\beta)},\ \beta > 0$	$\frac{1}{(s-a)^\beta}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{bt}\sin(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2+a^2}$
$e^{bt}\cos(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$e^{bt}\sinh(at)$	$\frac{a}{(s-b)^2-a^2}$
$e^{bt}\cosh(at)$	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$
$t\sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2+a^2)^2}$
$t\cos(at)$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$
$J_0(at)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$
$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$