

# Rechenteil

## 1. Aufgabe (7+2 Punkte)

a) Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix: Charakt. Polynom:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 2 & 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2(4 - \lambda).$$

Wir erhalten  $\lambda_1 = 3$  (doppelter EW) und  $\lambda_2 = 4$ . Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = 3$ :

$$(A - \lambda_1 E)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \iff v_1 = 0 \text{ und } v_2 + v_3 = 0$$

ergibt

$$\vec{v}^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt keinen weiteren, von  $\vec{v}^{(1)}$  linear unabh. Eigenvektor zu  $\lambda_1 = 3$ . Die algebraische Vielfachheit von  $\lambda_1$  ist aber 2. Daher suchen wir einen weiteren Hauptvektor  $\vec{w}$  mit

$$(A - \lambda_1 E)\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{w} = \vec{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dieses System wird z. B. gelöst durch

$$\vec{w} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_2 = 4$  ist einfacher Eigenwert.

$$(A - \lambda_2 E)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{v} = \vec{0} \iff v_3 = v_2 = 0.$$

Eigenvektor zu  $\lambda_2 = 4$  ist daher:

$$\vec{v}^{(2)} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten als Fundamentalsystem:

$$\vec{x}^{(1)}(t) = e^{t\lambda_1} \vec{v}^{(1)} = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\vec{x}^{(2)}(t) &= e^{t\lambda_1} \exp(t[A - \lambda_1 E])\vec{w} \\
&= e^{t\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} [A - \lambda_1 E]^k \vec{w} = e^{t\lambda_1} [\vec{w} + t(A - \lambda_1 E)\vec{w}] = e^{t\lambda_1} [\vec{w} + t\vec{v}^{(1)}] \\
&= e^{3t} \left[ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^{3t} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -t \\ 3/2 + t \end{pmatrix}, \\
\vec{x}^{(3)}(t) &= e^{t\lambda_2} \vec{v}^{(2)} = e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Allgemeine Lösung des Systems

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= C_1 \vec{x}^{(1)}(t) + C_2 \vec{x}^{(2)}(t) + C_3 \vec{x}^{(3)}(t) \\
&= C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -t \\ 3/2 + t \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2, C_3 \text{ Konstanten.}
\end{aligned}$$

- b) Zur Lösung des Anfangswertproblems sind die Konstanten  $C_1, C_2, C_3$  aus (a) so zu bestimmen, dass die Anfangsbedingung erfüllt wird, d.h.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{x}(0) = \sum_{k=1}^3 C_k \vec{x}_k(0) = C_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{C_2}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow C_2 = 2, \quad C_1 = -3$$

und  $C_3 = 1 - C_1 - 3C_2/2 = 1$ .

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit

$$\vec{x}(t) = -3e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{3t} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -t \\ 3/2 + t \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

## 2. Aufgabe (3+6 Punkte)

- a) Mit der Einheitssprungfunktion  $u_a$  gilt:

$$f(t) = u_1(t) - u_3(t).$$

Mit dem Verschiebungssatz folgt nun:

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[u_1(t) - u_3(t)](s) = \frac{1}{s} (e^{-s} - e^{-3s})$$

b) Die Anwendung der Laplace-Transformation auf das AWP ergibt :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f](s) &= \mathcal{L}[y'' + 25y](s) = s^2\mathcal{L}[y](s) - y'(0) - sy(0) + 25\mathcal{L}[y](s) \\ &= (s^2 + 25)\mathcal{L}[y](s) - 3 + 2s. \\ \Rightarrow \mathcal{L}[y](s) &= \frac{1}{s^2 + 25}\mathcal{L}[f](s) + \frac{3 - 2s}{s^2 + 25} = \frac{1}{s(s^2 + 25)}(e^{-s} - e^{-3s}) + \frac{3 - 2s}{s^2 + 25}.\end{aligned}$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{s(s^2 + 25)} = \frac{As + B}{s^2 + 25} + \frac{C}{s}.$$

Einsetzmethode liefert:

$$\begin{aligned}C &= \left(\frac{1}{s^2 + 25}\right)_{s=0} = \frac{1}{25}, \\ A5i + B &= \left(\frac{1}{s}\right)_{s=5i} = \frac{1}{5i} = \frac{-i}{5} \Rightarrow A = \frac{-1}{25} \text{ und } B = 0,\end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{s(s^2 + 25)} = \frac{1}{25} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 25} \right).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y](s) &= \frac{1}{25} \left( \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 25} \right) (e^{-s} - e^{-3s}) + \frac{3 - 2s}{s^2 + 25} \\ &= \frac{1}{25} (\mathcal{L}[1](s) - \mathcal{L}[\cos(5t)](s)) (e^{-s} - e^{-3s}) + \frac{3}{5}\mathcal{L}[\sin(5t)](s) - 2\mathcal{L}[\cos(5t)](s).\end{aligned}$$

Rücktransformation ergibt mit dem Verschiebungssatz

$$y(t) = \frac{1}{25} (u_1(t)(1 - \cos 5(t - 1)) - u_3(t)(1 - \cos 5(t - 3))) + \frac{3}{5} \sin(5t) - 2 \cos(5t).$$

### 3. Aufgabe (5+4+3 Punkte)

a) Einsetzen des Produktansatzes  $u(x, t) = F(x)G(t)$  in Dgl. ergibt

$$F(x)G'(t) = u_t(x, t) = 5u_{xx}(x, t) = 5F''(x)G(t),$$

damit

$$\frac{G'(t)}{5G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = \lambda \quad (\text{Konstante}),$$

d.h.

$$F''(x) = \lambda F(x), \quad G'(t) = 5\lambda G(t).$$

Die allgemeine Lösung der Gleichung für  $G$  lautet:

$$G(t) = Ce^{5\lambda t}, \quad C \text{ Konstante}.$$

Die Bedingung

$$\lim_{t \rightarrow \infty} G(t) = 0$$

ist dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\lambda < 0.$$

In diesem Fall lautet die allgemeine Lösung der Gleichung für  $F$ :

$$F(x) = A \cos \sqrt{-\lambda}x + B \sin \sqrt{-\lambda}x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F(x)G(t) = \left( A \cos \sqrt{-\lambda}x + B \sin \sqrt{-\lambda}x \right) C e^{5\lambda t}, \\ &= \left( \alpha \cos \sqrt{-\lambda}x + \beta \sin \sqrt{-\lambda}x \right) e^{5\lambda t}, \end{aligned}$$

mit neuen Konstanten.

b) Mit

$$u_x(x, t) = \sqrt{-\lambda} \left( -\alpha \sin \sqrt{-\lambda}x + \beta \cos \sqrt{-\lambda}x \right) e^{5\lambda t}$$

ergibt Einsetzen in die (homogenen) Randbedingungen:

$$0 = u_x(0, t) = \sqrt{-\lambda}\beta e^{5\lambda t} \quad \text{und} \quad 0 = u(\pi/2, t) = \left( \alpha \cos \sqrt{-\lambda}\pi/2 + \beta \sin \sqrt{-\lambda}\pi/2 \right) e^{5\lambda t}$$

für alle  $t > 0$  und damit  $\beta = 0$  und  $\alpha \cos(\sqrt{-\lambda}\pi/2) = 0$ .

Sofern  $\alpha \neq 0$ , muss  $\cos(\sqrt{-\lambda}\pi/2) = 0$  gelten. Daher muss  $\sqrt{-\lambda}$  eine ungerade ganze Zahl sein, also

$$\sqrt{-\lambda} = 2m - 1, \quad \lambda = -(2m - 1)^2 \quad \text{mit } m \in \mathbb{N}.$$

Damit erhalten wir

$$u(x, t) = \alpha (\cos(2m - 1)x) e^{-5(2m-1)^2 t}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

c) Durch Überlagerung dieser Lösungen erhalten wir wieder eine Lösung der Dgl. mit den homogenen Randbedingungen :

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (\cos(2m - 1)x) e^{-5(2m-1)^2 t}.$$

Mit der Anfangsbedingung für  $u$  folgt

$$3 \cos x - 2 \cos 3x = u(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \cos(2m - 1)x.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\alpha_1 = 3, \quad \text{und} \quad \alpha_2 = -2, \quad \text{sonst } \alpha_m = 0.$$

Damit lautet die Lösung des AWP

$$u(x, t) = 3 (\cos x) e^{-5t} - 2 (\cos 3x) e^{-5 \cdot 3^2 t} = 3 (\cos x) e^{-5t} - 2 (\cos 3x) e^{-45t}.$$