Verständnisteil

4. Aufgabe (4+3+4 Punkte)

a) Für die Systemantwort auf

$$F(t) = e^{-t}$$

und die Übertragungsfunktion gilt:

$$\mathcal{L}[S[F]](s) = G(s)\mathcal{L}[F](s) = \frac{G(s)}{s+1}.$$

Anderseits

$$\mathcal{L}[S[F]](s) = \mathcal{L}[e^{-t} - e^{2t}](s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-2},$$

und damit

$$G(s) = 1 - \frac{s+1}{s-2} = \frac{-3}{s-2}.$$

Für die durch

$$\mathcal{L}[h](s) = G(s)$$

gegebene Impulsantwort erhalten wir somit

$$h(t) = -3e^{2t}.$$

b) Sei $y = S[f]$ die Systemantwort auf $f(t) = e^{2t}$.
Dann gilt mit der Übertragungsfunktion G :

$$\mathcal{L}[y](s) = G(s)\mathcal{L}[f](s) = \frac{-3}{s-2} \cdot \frac{1}{s-2} = \frac{-3}{(s-2)^2}.$$

Rücktransformation ergibt

$$y(t) = -3te^{2t}.$$

c) Es gilt:

$$\mathcal{L}[S[u]](s) = G(s)\mathcal{L}[u](s) = \frac{-3}{s-2}\mathcal{L}[u](s)$$

$$= \mathcal{L}[t^2 e^{2t}](s) = \frac{2}{(s-2)^3}.$$

Auflösen nach $\mathcal{L}[u](s)$ ergibt

$$\mathcal{L}[u](s) = \frac{-2}{3(s-2)^2}.$$

damit

$$u(t) = \frac{-2t}{3}e^{2t}.$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

a) Richtig! Wir setzen $\vec{x}$ in das System ein:

$$\vec{0} = \dot{\vec{x}}(t) - A\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - tA \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} - A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ und } A \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Dies bedeutet, dass $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert Null sein muss. Daher ist $\vec{y}$ eine Lösung des Systems.

b) Falsch! Das charakteristische Polynom hat $2 \pm i$ als mindestens doppelte Nullstelle und 5 als mindestens einfache Nullstelle. Daher hat es mindestens den Grad fünf. Daher muss auch die DGL mindestens den Grad fünf haben.

c) Wahr! Die Dgl. ist von der Form:

$$y' = F(x, y) \text{ mit } F(x, y) = e^{17y^3 + \cos^6 x}(3 - y)^2.$$

Wegen $F(x, 3) = 0$ ist die konstante Funktion $y(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung der DGL, die auch die Anfangsbedingung erfüllt. $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist in allen Variablen stetig differenzierbar. Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz impliziert daher, dass $y(x) = 3$, $x \in \mathbb{R}$ die einzige (globale) Lösung des AWPs ist.

d) Falsch! Mit dem Verschiebungssatz gilt

$$e^{-3s}\mathcal{L}[e^{-t^2}](s) = \mathcal{L}[u_3(t)e^{-(t-3)^2}](s).$$

Wäre dies gleich $\mathcal{L}[e^{-(t-3)^2}](s)$, so würde mit dem Satz von Lerch folgen

$$u_3(t)e^{-(t-3)^2} = e^{-(t-3)^2},$$

was aber für alle $t \in [0, 3[$ nicht gilt.

e) Wahr!

$$u_x(x, t) = 3\cos(3x - t), \quad u_{xx}(x, t) = -9\sin(3x - t),$$

$$9u_{tt}(x, t) = -9\sin(3x - t) = u_{xx}(x, t).$$

6. Aufgabe (9 Punkte) Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}U(\omega, t) = \mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial t}u(\cdot, t)\right](\omega) = \mathcal{F}\left[-3\frac{\partial^4}{\partial x^4}u(\cdot, t)\right](\omega)$$

$$= -3(i\omega)^4\mathcal{F}[u(\cdot, t)](\omega) = -3\omega^4 U(\omega, t).$$

Außerdem erhalten wir mit dem Skalierungssatz

$$U(\omega, 0) = \mathcal{F}\left[e^{-|x|/6}\right](\omega) = 6\mathcal{F}\left[e^{-|x|}\right](6\omega) = \frac{12}{1 + 36\omega^2}.$$

(Siehe Hinweis) Bei festem ω ist dies ein gewöhnliches AWP für $U(\omega, \cdot)$. Die allgem. Lösung der Dgl.

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\omega, t) = -3\omega^4 U(\omega, t)$$

ist

$$U(\omega, t) = A(\omega) e^{-3\omega^4 t}$$

mit Konstante $A(\omega)$, die noch von ω abhängen kann.

Mit der AB folgt :

$$A(\omega) = U(\omega, 0) = \frac{12}{1 + 36\omega^2}$$

und damit

$$U(\omega, t) = \frac{12}{1 + 36\omega^2} e^{-3\omega^4 t}.$$