Musterloesung

Klausur Informatik 1
10. April 2001

Jähnichen / Flik
Sokenou / Neunast

Name: .....

Vorname: .....

Matr.-Nr.: .....

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

- Benutzen Sie für die Lösung der Aufgaben nur das mit diesem Deckblatt ausgeteilte Papier. **Lösungen, die auf anderem Papier geschrieben werden, können nicht gewertet werden!**
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf das Aufgabenblatt der jeweiligen Aufgabe. Verwenden Sie auch die Rückseite. **Schreiben Sie keine Lösungen einer Aufgabe auf ein Blatt, das nicht zu dieser Aufgabe gehört!** Wenn Sie zusätzliche, von uns ausgegebene Blätter verwenden, geben Sie unbedingt an, zu welcher Aufgabe die Lösung gehört.
- Schreiben Sie deutlich! Doppelte, unleserliche oder mehrdeutige Lösungen können nicht gewertet werden.
- Schreiben Sie nur in **blau** oder **schwarz**. Schreiben Sie nicht mit Bleistift!
- Bei der Implementation von OPAL-Funktionen brauchen *keine* Importe mit angegeben zu werden, wenn Funktionen aus dem gegebenen Teil der Bibliotheca Opalica (oder aus der Struktur `Nat`, `Real`, `Seq` oder den Strukturen für die Listenfunktionale) oder sonstigen (in den Aufgaben) gegebenen Strukturen benutzt werden!
- Die OPAL-Implementierungen müssen nicht dokumentiert werden.
- Erscheint Ihnen eine Aufgabe mehrdeutig, wenden Sie sich an die Betreuer.
- Tragen Sie jetzt (vor Beginn der Bearbeitungszeit) auf *allen* Blättern Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein.

Aufgabe	Punkte	erreicht
1	18	
2	15	
3	6	
4	4	
5	6	

1. Aufgabe (18 Punkte): Datentypen und Listenfunktionale

Musterloesung

In dieser Aufgabe soll ein kleines Shopsystem für ein Warenhaus erstellt werden.
Gegeben sind folgende Datentypdefinitionen:

```
DATA preis == netto( wert:real, mwst:real )
              brutto( wert:real )

DATA ware == ware( name:denotation, preis:preis )

DATA kunde == kunde( name:denotation, einkauf:seq[ware] )
```

1.1. Induzierte Signatur (2 Punkte) Geben Sie die induzierte Signatur des Datentyps `preis` an. Um welche Art von Datentyp handelt es sich bei `preis`? Wie nennt man die einzelnen induzierten Elemente?

Lösung:

Induzierte Signatur:

```
-- Sorte
SORT preis

-- Konstruktoren
FUN netto : real ** real -> preis
FUN brutto : real -> preis

-- Selektoren
FUN wert : preis -> real
FUN mwst : preis -> real

-- Diskriminatoren
FUN brutto? : preis -> bool
FUN netto? : preis -> bool
```

Bei `preis` *handelt es sich um einen Summentypen.*

1.2. Berechnung des Bruttopreises (2 Punkte) Der Preis kann entweder ein Bruttopreis (inklusive Mehrwertsteuer) oder ein Nettopreis (mit Angabe des Nettopreises und der Mehrwertsteuer) in DM sein. Die Mehrwertsteuer wird dabei angegeben als Wert zwischen 0 und 1, z.B. werden 16% als 0.16 angegeben.

Zum einheitlichen Umgang mit Preisen sollen alle Preise in Bruttopreise umgerechnet werden. Ein Bruttopreis wird dabei aus dem Nettopreis berechnet, indem der Nettopreis um die angegebene Mehrwertsteuer erhöht wird. So ergeben 100 DM Nettopreis mit 16% Mehrwertsteuer einen Bruttopreis von 116 DM.

Deklarieren und definieren Sie eine Funktion `bruttopreis`, die einen Preis bekommt und daraus einen neuen Preis als Bruttopreis berechnet.

Lösung:

```
FUN bruttopreis : preis -> preis
DEF bruttopreis(brutto(x)) == brutto(x)
DEF bruttopreis(netto(x,mwst)) == brutto(x + x*mwst)
```

Hinweis: Als Ergebnis der folgenden Aufgaben sind Bruttopreise anzugeben.

1.3. Berechnung des Gesamtpreises (4 Punkte) Deklarieren und definieren Sie eine Funktion `gesamtpreis`, die aus einer Liste von Waren den Gesamtpreis aller Waren als `real`-Wert berechnet. Verwenden Sie *keine* explizite Rekursion, sondern lediglich **Listenfunktionale**.

Lösung:

```
FUN gesamtpreis : seq[ware] -> real
DEF gesamtpreis(sw) == reduce (+,0) ( map ( \\x. wert(bruttopreis(preis(x))) ) (sw) )
```

1.4. Stammkunden (4 Punkte) Als Stammkunde wird geführt, wer Waren für einen Gesamtwert von über 200 DM bestellt.

Deklarieren und definieren Sie eine Funktion `stammkunden`, die aus einer Liste von Kunden eine Liste aller Stammkunden berechnet. Verwenden Sie *keine* explizite Rekursion, sondern lediglich **Listenfunktionale**.

Lösung:

```
FUN stammkunden : seq[kunde] -> seq[kunde]
DEF stammkunden(kn) == filter (\\k.gesamtpreis(einkauf(k))>("200"!)) (kn)
```

Musterloesung

1.5. Versandkosten für einen Kunden (2 Punkte) Die Versandkosten für einen Kunden werden wie folgt berechnet: Bei einem Warenwert unter 10 DM fallen Versandkosten im Wert von 10 DM an. Werden Waren im Wert von 100 DM oder mehr bestellt, fallen keine Versandkosten an. In allen anderen Fällen kostet der Versand 4,50 DM.

Deklarieren und definieren Sie eine entsprechende Funktion `versandkosten`, die die Versandkosten als `real`-Wert liefert.

Lösung:

```
FUN versandkosten : kunde -> real
DEF versandkosten(k) == LET bestellwert == gesamtpreis(einkauf(k))
                        IN
                        IF bestellwert >= "100"! THEN "0"!
                        ELSE IF bestellwert >= "10"! THEN "4.5"!
                             ELSE "10"!
                             FI
                        FI
```

1.6. Versandkosten für alle Kunden (4 Punkte) Zur Rechnungsstellung ist es erforderlich, daß für alle Kunden die Versandkosten in die Liste der einzukaufenden Waren eingefügt werden.

Deklarieren und definieren Sie eine Funktion `mitVersandkosten`, die aus einer Liste von Kunden eine neue Liste von Kunden berechnet. Dabei soll für jeden Kunden als erste Ware eine Ware mit dem Namen "Versandkosten" eingefügt werden, die als Preis den Wert der Versandkosten für die zu bestellende Ware enthält.

Lösung:

```
FUN mitVersandkosten : seq[kunde] -> seq[kunde]
DEF mitVersandkosten(kn) == LET vkost == \\k. ware( "Versandkosten",
                                            brutto(versandkosten(k)))
                                neukunde == \\k. kunde(name(k),
                                            vkost(k)::einkauf(k))
                            IN
                            map (neukunde) (kn)
```

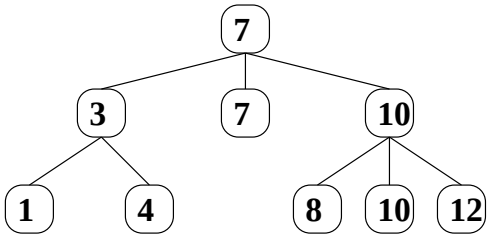
Hinweis: Es können zur Lösung dieser Aufgaben auch Funktionen aus anderen Unteraufgaben wiederverwendet werden, für die keine eigene Lösung angegeben wird.

2. Aufgabe (15 Punkte): Bäume und Funktionen höherer Ordnung

Musterloesung

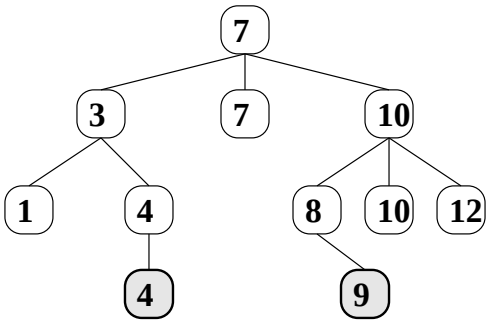
Grundlage dieser Aufgabe ist ein Baum, dessen Knoten einen Wert (natürliche Zahl) und drei Unterbäume enthält, einen linken, einen mittleren und einen rechten.
Dabei ist bei den folgenden Aufgaben davon auszugehen, daß der Baum sortiert ist. Das heißt, daß alle Elemente im linken Unterbaum kleiner sind als das Element im Knoten. Alle Elemente im rechten Unterbaum sind größer als das Element im Knoten. Alle Elemente im mittleren Unterbaum sind gleich dem Element im Knoten.

2.1. Einfügen in einen sortierten Baum (2 Punkte) Gegeben sei der folgende nach den oben genannten Kriterien sortierte Baum:



Zeichnen Sie ein, an welcher Stelle die Werte 4 und 9 eingefügt werden müßten. Dabei soll die vorhandene Baumstruktur nicht verändert werden.

Lösung:



2.2. Typdefinition Baum (3 Punkte) Definieren Sie einen Typ Baum, mit dem die oben dargestellten Bäume repräsentiert werden können. Dabei soll der Baum als Elemente natürliche Zahlen aufnehmen können.

Lösung:

```
DATA baum == nil
             node( wert: nat, links: baum, mitte: baum, rechts: baum )
```

2.3. Anzahl der Elemente (2 Punkte) Deklarieren und definieren Sie eine Funktion `anzahl`, die die Anzahl des Auftretens eines Elementes `x` im Baum berechnet.

Lösung:

```
FUN anzahl : nat -> baum -> nat
DEF anzahl (_) (nil) == 0
DEF anzahl (x) (node(wert, links, mitte, rechts)) ==
                IF (x = wert) THEN 1 + anzahl(x)(mitte)
                IF (x < wert) THEN anzahl(x)(links)
                IF (x > wert) THEN anzahl(x)(rechts)
                FI
```

2.4. Map mit Auswahl (4 Punkte) Deklarieren und definieren Sie eine Funktion `auswahlMap`, die eine Funktion `f`, ein Prädikat `p` und einen Baum `b` als Parameter erhält und einen neuen Baum zurückliefert, in dem die Funktion `f` auf jedes Element des Baumes `b` angewendet wurde, das `p` erfüllt.

Lösung:

Musterlösung

```
FUN auswahlMap : (nat -> bool) -> (nat -> nat) -> baum -> baum
DEF auswahlMap (_) (_) (nil) == nil
DEF auswahlMap (p) (f) (node(wert, links, mitte, rechts)) ==
    LET neuwert == IF (p(wert)) THEN f(wert)
                                ELSE wert
                   FI
      IN
    node( neuwert, auswahlMap(p)(f)(links),
                   auswahlMap(p)(f)(mitte),
                   auswahlMap(p)(f)(rechts) )
```

2.5. Ersetzen von Elementen (2 Punkte) Deklarieren und definieren Sie eine Funktion `ersetze` mit Hilfe der Funktion `auswahlMap`, die ein bestimmtes Element `x` durch ein Element `y` ersetzt.

Lösung:

```
FUN ersetze : nat**nat -> baum -> baum
DEF ersetze (x,y) (b) ==
        LET p == \\a. a = x
            f == \\ _ . y
          IN
        auswahlMap (p) (f) (b)
```

2.6. Effizienz (2 Punkte)

1. Zu welchen Problemen führt die Anwendung von `ersetze`?

   Lösung:
   Die Funktion `ersetze` *ist in sofern kritisch, da sie dazu führen kann, daß der zurückgelieferte Baum nicht mehr sortiert ist.*

2. Die Funktionsdefinition mit Hilfe von `auswahlMap` ist zudem ineffizient. Warum?

   Lösung:
   Da nach dem ersten gefundenen Element `x` *alle weiteren nur noch im mittleren Unterbaum liegen können, ist ein Durchsuchen des rechten und linken Unterbaumes wie in* `auswahlMap` *unnötig. Ist das Element* `x` *kleiner als der aktuelle Wert im Knoten, so ist nur das Durchsuchen des linken Unterbaumes nötig, ist es größer, nur das Durchsuchen des rechten Unterbaumes. Die Funktion* `ersetze` *müßte also in jedem Rekursionsschritt nur einen Unterbaum durchsuchen, hat dementsprechend linearen Aufwand.*

3. Aufgabe (6 Punkte): Zahlendarstellung

Musterloesung

Gegeben sind das aus der Vorlesung bekannte Gleitpunktformat (1-Bit-Vorzeichen, 4-Bit-Exponent, 11-Bit-Mantisse, bias = 7) und die Zahl x in der Gleitpunktdarstellung 0 0010 00100000000, welche mit $y = 14,5_{10}$ multipliziert werden soll.

3.1. (2 Punkte) Stellen Sie x und y in der Form $\pm a \cdot 2^b$ dar (a als Festpunktzahl im Dualsystem mit $1,0 \leq a < 2,0$ und b als 4-Bit-2-Komplement-Zahl).

Lösung:

$$\begin{aligned} x &= 1.001_2 \cdot 2^{1011} \\ y &= 1.1101_2 \cdot 2^{0011} \end{aligned}$$

3.2. (3 Punkte) Multiplizieren Sie x und y, indem Sie die Mantissenbeträge a multiplizieren und die Exponenten b addieren. Führen Sie beide Operationen im Dualsystem in schriftlicher Form und ohne Näherungen aus. Normalisieren Sie gegebenenfalls das Ergebnis.

Lösung:

1.	*1*	*1*	*0*	*1*	·	*1.*	*0*	*0*	*1*
						1	*1*	*1*	*0*	*1*
					0	*0*	*0*	*0*	*0*	
				0	*0*	*0*	*0*	*0*		
			1	*1*	*1*	*0*	*1*			
		1	*0.*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*0*	*1*

	0	*0*	*1*	*1*
+	*1*	*0*	*1*	*1*
	1	*1*	*1*	*0*

$$\begin{aligned} x \cdot y &= 10.0000101 \cdot 2^{1110} \\ &= 1.00000101 \cdot 2^{1111} \end{aligned}$$

3.3. (1 Punkte) Geben Sie das Produkt $x \cdot y$ als Dezimalzahl und im Gleitpunktformat an.

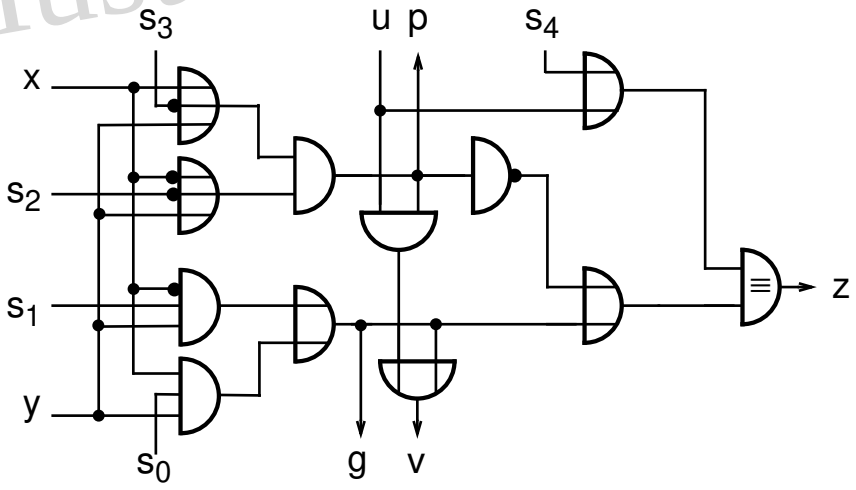
Lösung:

$x \cdot y = 0,509765625_{10} =$ *0 0110 00000101*

4. Aufgabe (4 Punkte): Schaltnetzanalyse

Musterloesung

Gegeben ist folgendes Schaltnetz:



4.1. **(2 Punkte)** Geben Sie die logischen Gleichungen für g, p, v und z an (g und p dürfen für v und z weiterverwendet werden).

Lösung:

$$
\begin{aligned}
g &= s_0 \cdot x \cdot y + s_1 \cdot \overline{x} \cdot y \\
p &= (\overline{s_2} + \overline{x} + y) \cdot (\overline{s_3} + x + y) \\
v &= u \cdot p + g \\
z &= (\overline{p} + g) \equiv (s_4 + u)
\end{aligned}
$$

4.2. **(2 Punkte)** Formen Sie die Gleichung für z nach Einsetzen der Eingangsbelegung $s_0 \ldots s_4 = [10011]$ und von g und p in eine disjunktive Normalform um. Welche Verknüpfung aus x und y stellt z mit dieser Eingangsbelegung dar? Kreuzen Sie an:

- ◯ Addition
- ◯ Disjunktion
- ◯ Identität
- ◯ Implikation
- ◯ Äquivalenz
- ◯ Peirce-Funktion
- ◯ Antivalenz
- ◯ Konjunktion

Lösung:

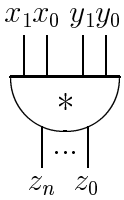
$$
\begin{aligned}
g &= 1 \cdot x \cdot y + 0 \cdot \overline{x} \cdot y \\
&= x \cdot y \\
p &= (\overline{0} + \overline{x} + y) \cdot (\overline{1} + x + y) \\
&= x + y \\
z &= (\overline{p} + g) \equiv (1 + u) \\
&= (\overline{x + y} + x \cdot y) \equiv 1 \\
&= \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot y
\end{aligned}
$$

Damit wird die Äquivalenz dargestellt.

5. Aufgabe (6 Punkte): KV-Minimierung

Musterloesung

Es soll ein Schaltnetz entworfen werden, das zwei 2-Bit-2-Komplement-Zahlen multipliziert und das Produkt als 2-Komplement-Zahl ausgibt.

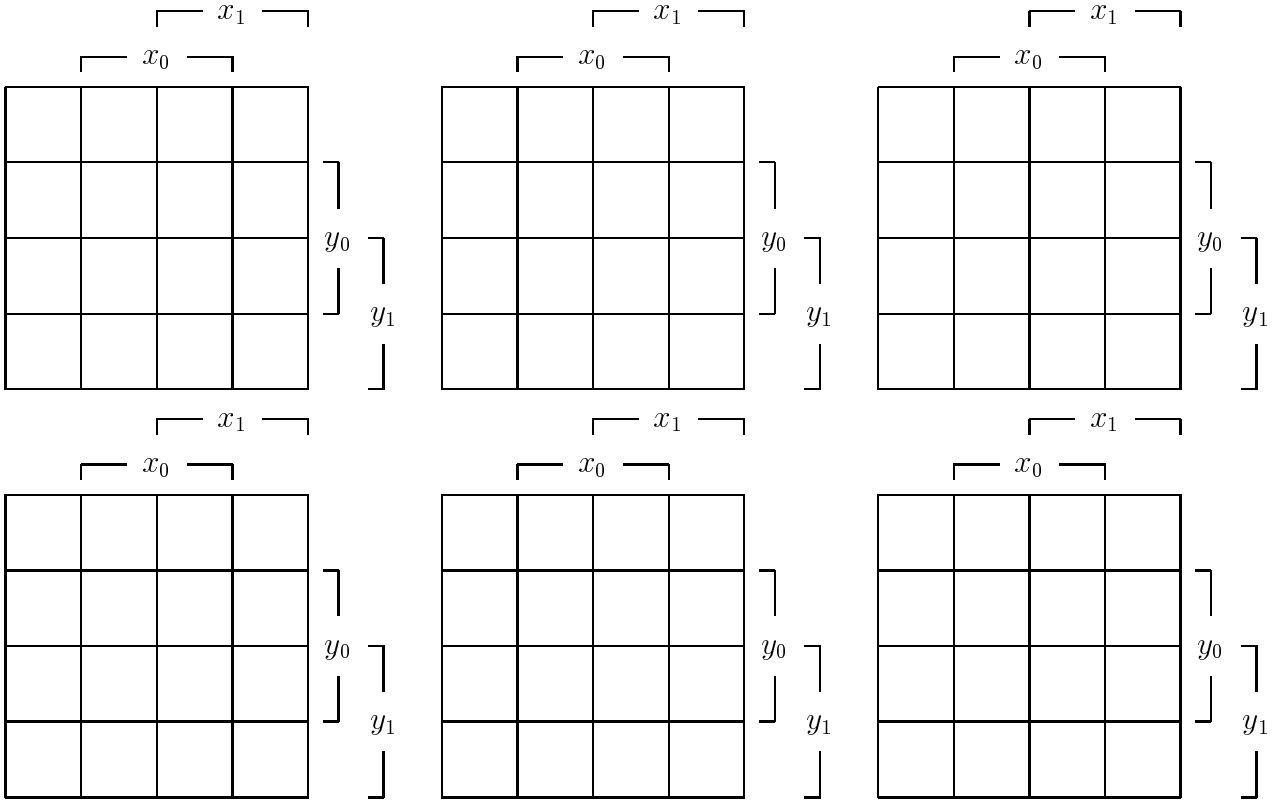


5.1. (2 Punkte) Geben Sie das größte sowie das kleinste vorkommende Produkt als Dezimalzahl und als 2-Komplement-Zahl mit minimaler Stellenanzahl an. Geben Sie n an.

Lösung:

$$\begin{aligned}(-2)\cdot(-2) &= +4\\ &= 0100_2\\ (+1)\cdot(-2) &= -2\\ &= 1110_2\\ n &= 3\end{aligned}$$

5.2. (4 Punkte) Entwickeln Sie die booleschen Gleichungen für z_n bis z_0 in minimaler disjunktiver Normalform!



Lösung:

Musterloesung

	x_1		
	x_0		
0000	0000	0000	0000
0000	0001	1111	1110
0000	1111	0001	0010
0000	1110	0010	0100

y_0 (rows 2–3), y_1 (rows 3–4)

$$
\begin{aligned}
z_3 &= x_1 y_0 \overline{y_1} + x_0 \overline{x_1} y_1 \\
z_2 &= x_1 y_0 \overline{y_1} + x_0 \overline{x_1} y_1 + \overline{x_0} x_1 \overline{y_0} y_1 \\
z_1 &= x_1 y_0 \overline{y_1} + x_0 \overline{x_1} y_1 + \overline{x_0} x_1 y_0 + x_0 \overline{y_0} y_1 \\
z_0 &= x_0 y_0
\end{aligned}
$$