Schriftlicher Test - B

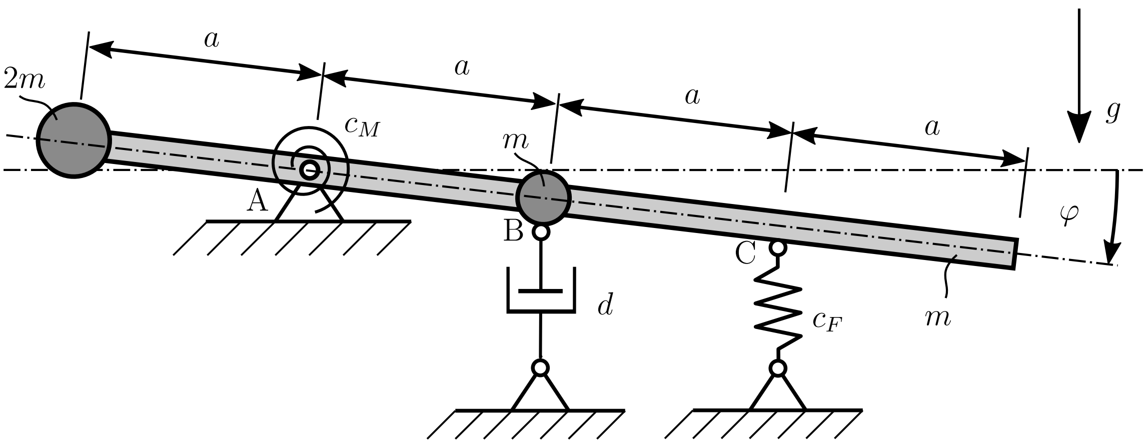
Kinematik und Dynamik – SoSe 2021

Prof. Dr. rer. nat. Valentin Popov

Der vorliegende, schriftliche Test bildet den **dritten und letzten Teil der Portfolioprüfung**. Im schriftlichen Test können maximal 60 Portfoliopunkte erzielt werden. Für die Gesamtnote und damit das Bestehen der Portfolioprüfung zählt nur die Summe der erreichten Portfoliopunkte aus allen drei Prüfungselementen. Der schriftliche Test besteht aus 3 Rechenaufgaben. Die **Bearbeitungszeit** des schriftlichen Tests beträgt **89 Minuten**.

1 Freie Schwingung 4+8+1+3+5 = 21 Punkte

Das skizzierte ebene System im Schwerefeld der Erde besteht aus einem homogenen, schmalen Stab der Länge $4a$ und Masse m, an dem zwei Massenpunkte befestigt sind; einer am linken Ende mit der Masse $2m$ und einer im Punkt B mit der Masse m. Der Stab sei im Punkt A reibungsfrei drehbar gelagert. Am Lager ist zudem eine lineare Drehfeder der Steifigkeit c_M und im Punkt C eine lineare Feder der Steifigkeit c_F befestigt. Die Federn seien in der nicht ausgelenkten Lage ($\varphi = 0$) entspannt. Im Punkt B ist ein linearer Dämpfer mit der Dämpfungskonstante d befestigt. Das System sei schwach gedämpft.



(a) Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment Θ_A des Systems (Stab und Massenpunkt) bezüglich der Aufhängung in Punkt A.

Hinweis: Massenträgheitsmomente bzgl. des Schwerpunkts eines Stabs (Masse M, Länge L):

$$\Theta_\mathrm{Stab} = \frac{1}{12} M L^2$$

(b) Schneiden Sie das System frei und ermitteln Sie die **nicht-lineare Bewegungsdifferentialgleichung** für die eingezeichnete Winkelkoordinate φ.

(c) Wie lautet die lineare Bewegungsdifferentialgleichung für kleine Auslenkungen?

Hinweis: Verwenden Sie für die nachfolgenden Aufgaben die unten aufgeführte Differentialgleichung:

$$m\ddot{\varphi} + \frac{3}{16} d\dot{\varphi} + \frac{3}{16}\left(\frac{c_M}{a^2} + 4c_F\right)\varphi = 0$$

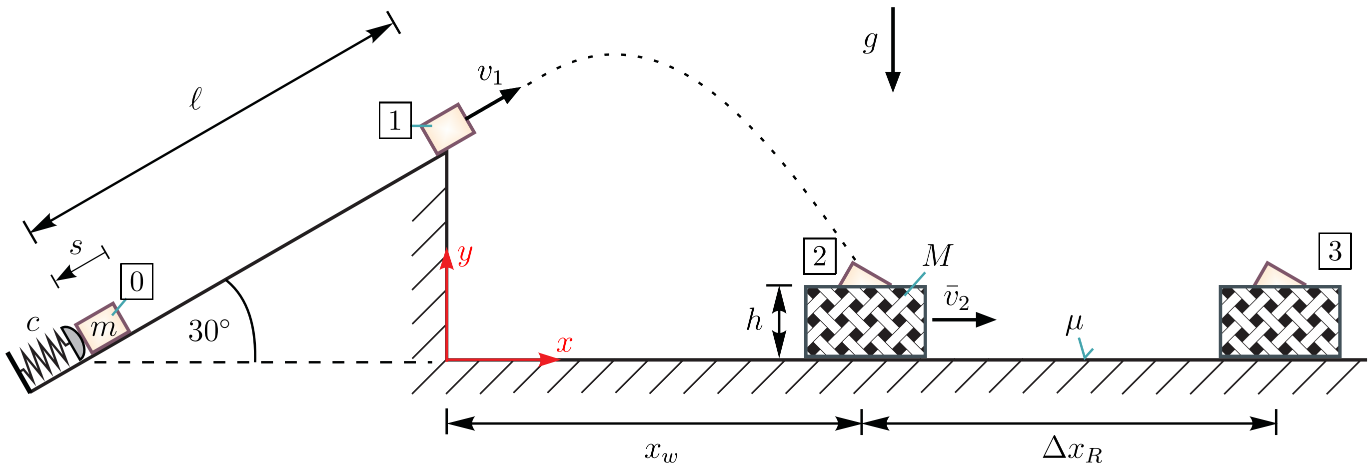
(d) Geben Sie die Eigenkreisfrequenzen des ungedämpften und gedämpften Systems sowie die Abklingkonstante an.

(e) Wie lautet die Lösung $\varphi(t)$ für die Anfangsbedingungen $\varphi(t = 0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t = 0) = \Omega_0$? Die allgemeine Lösung muss nicht hergeleitet werden und die Größen aus Aufgabenteil (d) müssen nicht eingesetzt werden.

Geg.: c_M, c_F, d, a, m, g, φ_0, Ω_0

$\boxed{2}$ Kinetik des Massepunktes   3+2+3+4+3+5 = 20 Punkte

Ein Paket der Masse m wird im Punkt $\boxed{0}$ durch eine um den Weg s vorgespannte, masselose Feder der Steifigkeit c aus der Ruhelage eine reibungsfreie, schiefe Ebene hinauf beschleunigt, die es im Punkt $\boxed{1}$ mit der Geschwindigkeit v_1 verlässt. Der anschließende schiefe Wurf des Paketes endet im Punkt $\boxed{2}$. Hier trifft das Paket in der Höhe h auf einen zunächst ruhenden Auffangbehälter der Masse M und bleibt in dieser Höhe darin liegen. Durch den vollplastischen Stoß setzt sich der Auffangbehälter samt Paket in Bewegung. Er rutscht auf einer reibungsbehafteten Ebene (Reibungskoeffizient μ) bis er im Punkt $\boxed{3}$ wieder zur Ruhe kommt. Das Paket soll als Massepunkt angenommen und Luftreibung während der Wurfbewegung vernachlässigt werden.



(a) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit v_1, mit der das Paket die schiefe Ebene im Punkt $\boxed{1}$ verlässt. Stellen Sie dazu den **Energieerhaltungssatz** zwischen den Punkten $\boxed{0}$ und $\boxed{1}$ auf.

(b) Wie groß muss der Federvorspannweg s mindestens sein, damit das Paket überhaupt das Ende der schiefen Ebene im Punkt $\boxed{1}$ erreicht?

Für die nachfolgenden Aufgabenteile sei die Geschwindigkeit v_1 gegeben.

(c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen ($\ddot{x}$, $\dot{x}$, x, $\ddot{y}$, $\dot{y}$, y) für den schiefen Wurf unter Berücksichtigung des **gegebenen Koordinatensystems** auf.

(d) In welchem Abstand x_w muss der Auffangbehälter positioniert sein, wenn das Paket wie skizziert in der Höhe h vom Behälter im Punkt $\boxed{2}$ aufgenommen/aufgefangen werden soll?

(e) Mit welcher gemeinsamen Geschwindigkeit $\bar{v}_2$ bewegen sich Behälter und Paket unmittelbar nach dem (als plastisch anzunehmenden) Stoß horizontal weiter, wenn die Reibung zwischen Behälter und Untergrund während der Dauer des Stoßes als nicht impulsrelevant angenommen werden soll?

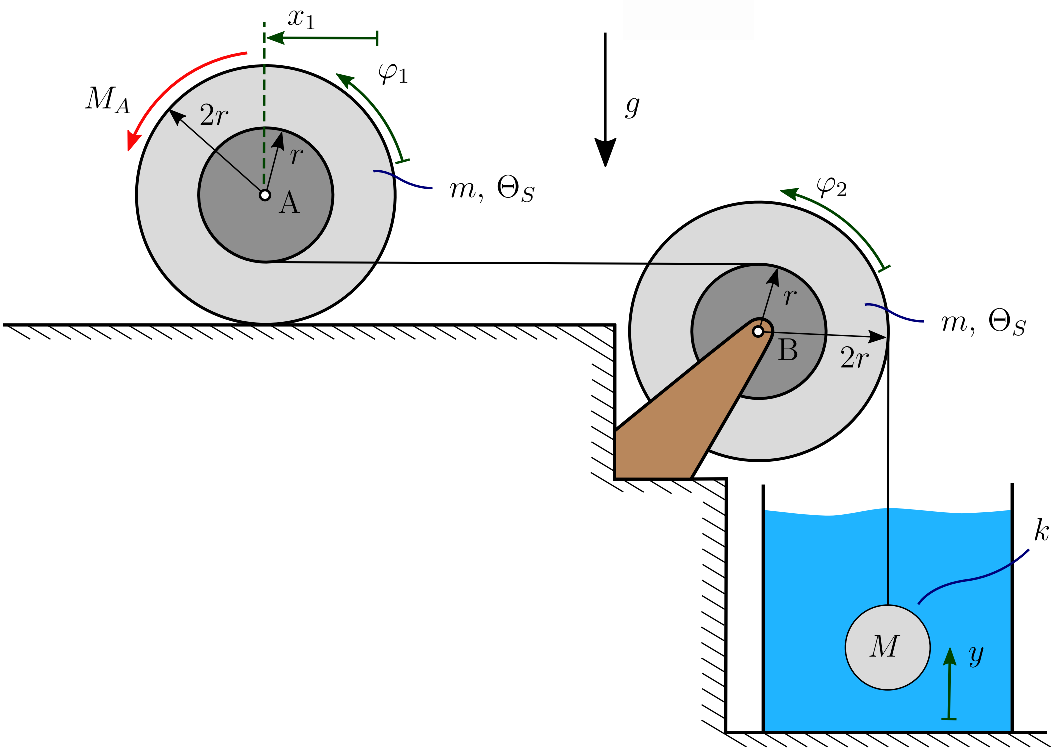
Für den nachfolgenden Aufgabenteil sei die Geschwindigkeit $\bar{v}_2$ gegeben.

(f) Nach welcher Rutschstrecke Δx_R kommt der Behälter (samt Paket) aufgrund der vorhandenen Reibung wieder zum Stillstand?

Geg.: μ, ℓ, h, m, M, g, c, s, v_1 in Aufgabenteilen (c), (d) und (e), $\bar{v}_2$ in Aufgabenteil (f)

$\boxed{3}$ Kinematik und Dynamik von Starrkörpersystemen $\quad$ 3+5+3+3+5 = 19 Punkte

Das skizzierte ebene Starrkörpersystem im Schwerefeld der Erde besteht aus drei starren Körpern: Einem auf der skizzierten Ebene ***rein rollenden*** Stufenrad (m, Θ_S) mit Innradius r und Außenradius $2r$, einem bauchgleichen im Punkt B gelagterten Stufenrad (m, Θ_S) und einer in einer Flüssigkeit befindlichen Kugel der Masse M. Das rollende Rad ist mit einem Moment M_A angetrieben. An den Innenradien der Stufenräder wickelt sich ein Seil wie eingezeichnet auf bzw. ab. Über ein weiteres, am Außenradius des rechten Stufenrads gewickeltes Seil ist die Kugel befestigt. **Der Strömungswiderstand der Kugel in der Flüssigkeit ist proportional zur Geschwindigkeit mit dem Widerstandskoeffizienten k. Der hydrostatische Auftrieb der Kugel soll vernachlässigt werden!**



(a) Schneiden Sie die einzelnen Körper **vollständig** frei (es sind also **alle** wirkenden Kräfte und Momente anzutragen)!

(b) Schreiben Sie für jeden Körper den Schwerpunkt- und/oder den Drallsatz auf, je nachdem, was für die Berechnung relevant sein könnte.

(c) Stellen Sie alle notwendigen kinematischen Beziehungen auf. Geben Sie dafür die Geschwindigkeiten $(\dot{x}_1, \dot{\varphi}_2, \dot{y})$ nur in Abhängigkeit von $\dot{\varphi}_1$ und die Beschleunigungen $(\ddot{x}_1, \ddot{\varphi}_2, \ddot{y})$ in Abhängigkeit von $\ddot{\varphi}_1$ an!

(d) Wie lautet die resultierende Bewegungsdifferentialgleichung für φ_1?

Rechnen Sie im Folgenden mit der Differentialgleichung $\ddot{\varphi}_1 + \dfrac{k}{3m}\dot{\varphi}_1 = 0$ weiter!

(Diese Gleichung ergibt sich für $\Theta_S = 2Mr^2$, $M = m$, $M_A = 2rmg$)

(e) Lösen Sie die vorgegebene Differentialgleichung für die Anfangsbedingungen $\varphi_1(t=0) = 0$ und $\dot{\varphi}_1(t=0) = \Omega_0$.
Hinweis: Nutzen Sie den Ansatz $\varphi_1(t) = C_1 + C_2\, e^{\lambda t}$ oder alternativ: Trennung der Variablen!

Geg.: m, M, Θ_S, r, k, g, M_A