Lösungsvorschlag zur Klausur vom 22.07.2011

Lösungsvorschlag

Theorieaufgaben

[10 Punkte]

Aufgabe T1

[1 Punkt]

Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die Gestalt

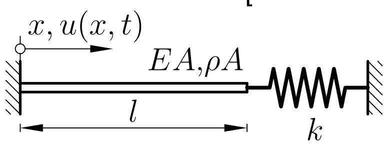
$$w(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct).$$

Welche der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in die negative x-Richtung laufende Welle?

☐ $\frac{1}{2}(g+h)$	☐ $\frac{1}{2}(g-h)$	☐ g	☒ h 1

Aufgabe T2

[2 Punkte]



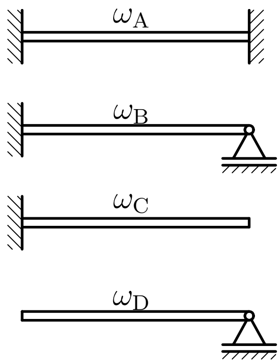
Geben Sie den Rayleigh-Quotienten R für die Stablängsschwingungen des skizzierten Systems an. Verwenden Sie $U(x)=x$ als zulässige Funktion.

Gegeben: EA, ρA, k, l, $U(x)=x$

$$R = \frac{\frac{1}{2}\int_0^l EA\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}kl^2}{\frac{1}{2}\int_0^l \rho A x^2\,\mathrm{d}x} = 3\,\frac{EA+kl}{\rho A l^2} \quad 2$$

Aufgabe T3

[2 Punkte]

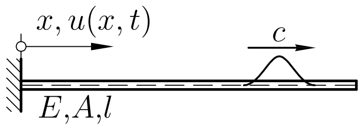


Die vier skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich nur in der Art ihrer Lagerung. Die jeweils erste Eigenkreisfrequenz der Systeme ist $\omega_{\mathrm{A,B,C,D}}$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

☐ $\omega_\mathrm{A} < \omega_\mathrm{B}$	☒ $\omega_\mathrm{D} = 0$ 1
☒ $\omega_\mathrm{B} > \omega_\mathrm{C}$ 1	☐ $\omega_\mathrm{B} = \omega_\mathrm{C} + \omega_\mathrm{D}$
☐ $\omega_\mathrm{C} > \omega_\mathrm{A}$	

Aufgabe T4

[1 Punkt]



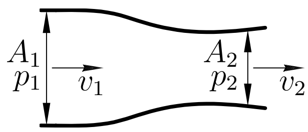
In dem skizzierten Stab (E-Modul E, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Querschnittsfläche A, Länge l) läuft die Welle $u(x,t)$ auf das rechte freie Ende zu. Geben Sie die Normalspannung $\sigma(l,t)$ am rechten Ende an.

$$\sigma(l,t) = 0 \quad 1$$

Aufgabe T5

[2 Punkte]

Eine ideale Flüssigkeit (Dichte ρ) strömt durch ein Rohr mit variabler Querschnittsfläche. An einer Stelle mit der Querschnittsfläche A_1 hat die Flüssigkeit den Druck p_1 und die Geschwindigkeit v_1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_2 und den Druck p_2 an der Stelle mit der Querschnittsfläche A_2.



Gegeben: A_1, A_2, p_1, v_1, ρ

Nebenrechnung:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2}$$ 1

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right)$$ 1

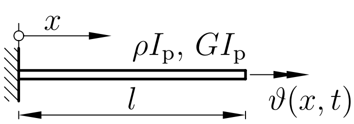
Aufgabe T6

[1 Punkt]

Wie lauten die Randbedingungen für den skizzierten Torsionsstab?

Randbedingungen:

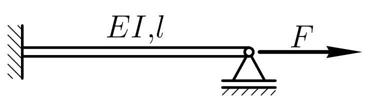
$\vartheta(0,t) = 0$ $\vartheta'(l,t) = 0$ oder $GI_{\mathrm{p}}\vartheta'(l,t) = 0$ 1



Aufgabe T7

[1 Punkt]

Welchen Einfluss hat eine konstante positive Vorspannkraft F auf die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen des skizzierten Systems? Kreuzen Sie an.



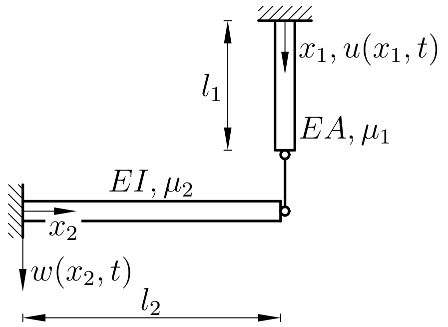
	kleiner	nicht verändert	größer
Die Eigenfrequenzen werden durch die Vorspannkraft 1	☐	☐	X

Aufgabe 1

[16 Punkte]

Das skizzierte System besteht aus einem homogenen Dehnstab (Dehnsteifigkeit EA, Massenbelegung μ_1, Länge l_1) und einem homogenen Balken (Biegesteifigkeit EI, Massenbelegung μ_2, Länge l_2, schlank und dehnstarr), die über eine starre Stange (Masse vernachlässigbar) verbunden sind.

Gegeben: EA, EI, μ_1, μ_2, l_1, l_2



a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen) für den Dehnstab und den Balken in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

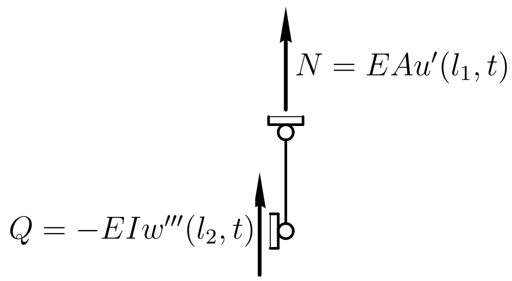
Bewegungsgleichungen:

Dehnstab: $\mu_1 \ddot{u}(x_1,t) - EAu''(x_1,t) = 0$ 1

Balken: $\mu_2 \ddot{w}(x_2,t) + EIw^{\mathrm{IV}}(x_2,t) = 0$ 1

b) Geben Sie alle Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an. (Hinweis: Zeichnen Sie ggf. ein Freikörperbild.)

Nebenrechnung, ggf. Freikörperbild:



Rand- und Übergangsbedingungen:

$u(0,t) = 0$ 1 $w(0,t) = 0$ 1 $w'(0,t) = 0$ 1

$EIw''(l_2,t) = 0$ 1

$-EIw'''(l_2,t) + EAu'(l_1,t) = 0$ 1 $w(l_2,t) = u(l_1,t)$ 1

c) Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 soll mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten abgeschätzt werden. Welche Bedingungen müssen die Ansatzfunktionen $U(x_1)$ und $W(x_2)$ erfüllen?

Bedingungen für $U(x_1)$ und $W(x_2)$:

$U(0) = 0$ $\quad W(0) = 0$ $\quad W'(0) = 0$ $\quad U(l_1) = W(l_2)$ 1

d) Wie lautet der Rayleigh-Quotient $R[U(x_1), W(x_2)]$ des Systems? Drücken Sie das Ergebnis nur in den gegebenen Größen sowie $U(x_1)$, $W(x_2)$ und deren Ableitungen aus.

Nebenrechnung:

$$T[\dot{u}(x_1,t), \dot{w}(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \mu_1 \dot{u}^2(x_1,t)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} \mu_2 \dot{w}^2(x_2,t)\mathrm{d}x_2 \quad 2$$

$$U[u(x_1,t), w(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} EA{u'}^2(x_1,t)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} EI{w''}^2(x_2,t)\mathrm{d}x_2 \quad 2$$

$$R[U(x_1), W(x_2)] = \frac{U[U(x_1), W(x_2)]}{T[U(x_1), W(x_2)]}$$

$$R[U(x_1), W(x_2)] = \frac{\displaystyle\int_0^{l_1} EA\,{U'}^2(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_0^{l_2} EI\,{W''}^2(x_2)\mathrm{d}x_2}{\displaystyle\int_0^{l_1} \mu_1 U^2(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_0^{l_2} \mu_2 W^2(x_2)\mathrm{d}x_2} \quad 1$$

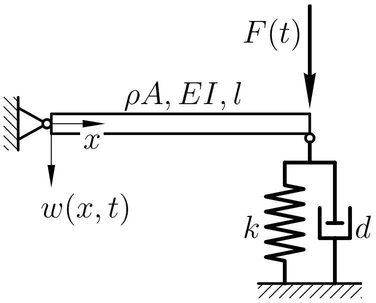
e) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) bezüglich des Rayleigh-Quotienten $R[U(x_1), W(x_2)]$ und der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an, wenn $U(x_1)$ und $W(x_2)$ die unter c) gefragten Bedingungen erfüllen.

- [ ] $\omega_1^2 > R[U(x_1), W(x_2)]$
- [x] $\omega_1^2 = R[U_1(x_1), W_1(x_2)]$ falls $U_1(x_1), W_1(x_2)$ erste Eigenform des Systems 1
- [x] $\omega_1^2 \leq R[U(x_1), W(x_2)]$ 1

Aufgabe 2

[10 Punkte]

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (ρA, EI, l) ist links gelagert und rechts über eine Feder (Steifigkeit k) sowie einen Dämpfer (Dämpfungskonstante d) abgestützt. Am Ende des Balkens wirkt zusätzlich die Kraft $F(t)$.



Gegeben: ρA, EI, l, k, d, $F(t)$

a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \dot{w}^2(x,t)\mathrm{d}x$$ 1

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

Nebenrechnung:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI w''^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}kw^2(l,t)$$ 1

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW der nicht in U berücksichtigten Kräfte an.

Nebenrechnung:

$$\delta W = F(t)\delta w(l,t) - d\dot{w}(l,t)\delta w(l,t)$$ 1

d) Geben Sie alle geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \quad \text{1}$$

e) Wie lautet allgemein das Prinzip von Hamilton für das System? Setzten Sie T, U und δW als gegeben voraus.

Prinzip von Hamilton für das System mit T, U und δW gegeben:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T-U)\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \delta W \mathrm{d}t \quad \text{1}$$

f) Nach Ausführen der Variation und partieller Integration liefert das Prinzip von Hamilton für das gegebene System den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \Big(-\rho A \ddot{w}(x,t) - EI w^{\mathrm{IV}}(x,t)\Big)\delta w(x,t)\,\mathrm{d}x + \Big(F(t) - k w(l,t) - d\dot{w}(l,t)\Big)\delta w(l,t) \right.$$
$$\left. + \Big[EI w'''(x,t)\delta w(x,t) - EI w''(x,t)\delta w'(x,t)\Big]_0^l \right\}\mathrm{d}t + \left[\int_0^l \rho A \dot{w}(x,t)\delta w(x,t)\mathrm{d}x\right]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Geben Sie damit die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) des Systems und die natürlichen (dynamischen) Randbedingungen an.

Bewegungsgleichung:

$$\rho A \ddot{w}(x,t) + EI w^{\mathrm{IV}}(x,t) = 0 \quad \text{1}$$

natürliche Randbedingungen:

$$F(t) - k w(l,t) - d\dot{w}(l,t) + EI w'''(l,t) = 0$$
$$EI w''(0,t) = 0 \quad \text{3}$$
$$EI w''(l,t) = 0$$

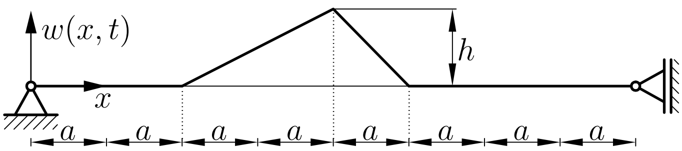
g) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- [x] Konservative Lasten können entweder über ihr Potential oder ihre virtuelle Arbeit berücksichtigt werden. 1
- [ ] Das Prinzip von Hamilton ist nicht anwendbar, wenn verteilte nichtkonservative Lasten auftreten.
- [ ] Bei nichtkonservativen Systemen liefert das Prinzip von Hamilton nur eine obere Schranke für die erste Eigenkreisfrequenz.

Aufgabe 3

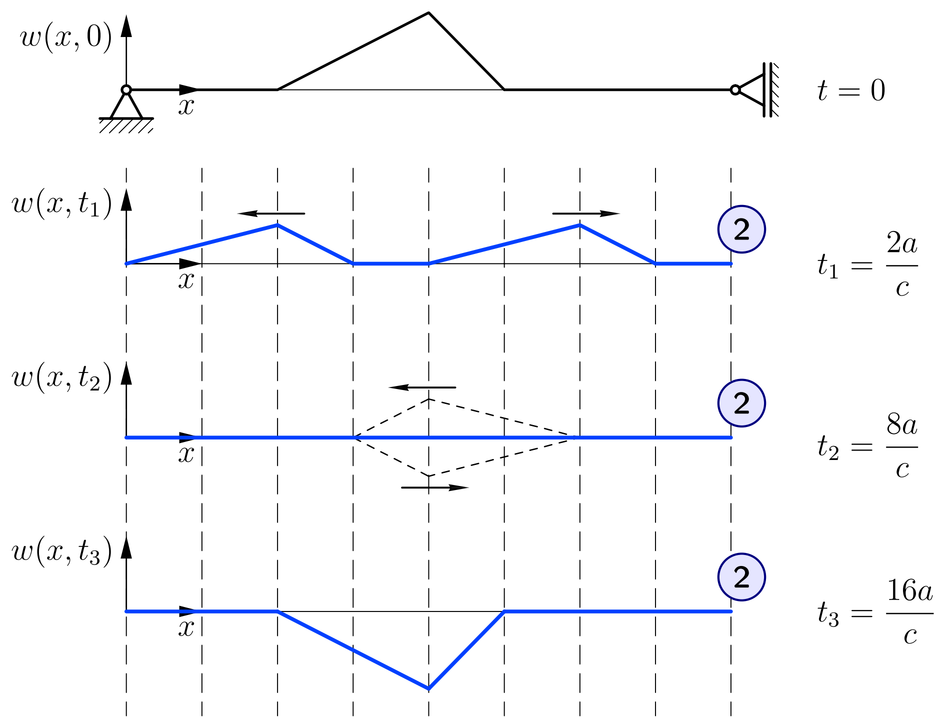
[9 Punkte]

Die fest-frei gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $8a$) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1=2a/c$, $t_2=8a/c$, $t_3=16a/c$ einzeichnen.



b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

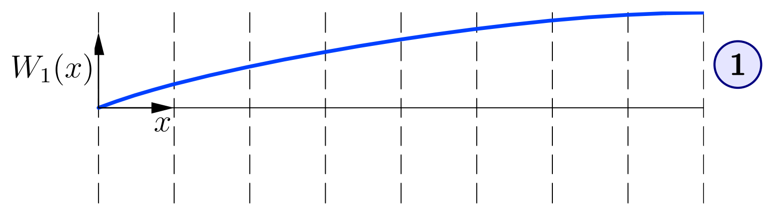
$$T = \frac{32a}{c}$$ 1

c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{16a}$$ 1

d) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.

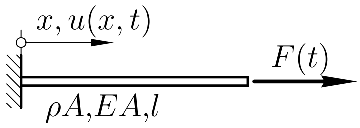
1. Eigenform



Aufgabe 4

[5 Punkte]

Der skizzierte Dehnstab (ρA, EA, l) wird am rechten Ende durch die Kraft $F(t)$ zu Schwingungen angeregt.



Gegeben: ρA, EA, l, $F(t)$

a) Geben Sie die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) für den Dehnstab in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

Bewegungsgleichung:

$$\rho A \ddot{u}(x,t) - EAu''(x,t) = 0$$ 1

b) Geben Sie alle Randbedingungen an.

Nebenrechnung, Skizze:

Randbedingungen:

$u(0,t) = 0$ $\qquad$ $EAu'(l,t) = F(t)$ 1

c) Die Kraft $F(t) = \hat{F}\cos\Omega t$ sei nun harmonisch (Ω gegeben). Machen Sie einen Ansatz zur Berechnung der eingeschwungenen Bewegung $u_\mathrm{P}(x,t)$ des System.

$$u_\mathrm{P}(x,t) = U(x)\cos\Omega t$$ 1

d) Gibt es Erregerkreisfrequenzen Ω^*, für die das rechte Ende des Dehnstabs trotz der Anregung $F(t) = \hat{F}\cos\Omega^* t$ in Ruhe bleiben kann? Kreuzen Sie an und begründen Sie ihre Antwort!

☐ Das ist nicht möglich. ☐ Es gibt genau ein Ω^*.

☒ Es gibt unendlich viele Ω^*. 2

Begründung:

Für alle Erregerkreisfrequenzen Ω^*, die Eigenkreisfrequenzen des fest-fest gelagerten Dehnstabs sind, kann das rechte Ende des Dehnstabs bei geeigneten Anfangsbedingungen in Ruhe bleiben.

Punkte nur bei schlüssiger Begründung und richtigem Kreuz.