1. Klausur Kontinuumsmechanik SoSe 08, Prof. Dr. U. von Wagner

Bitte deutlich schreiben!

Name, Vorname:

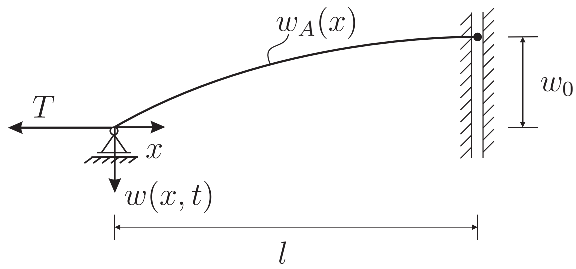
Matr.-Nr.:

Studiengang:

T	
1	
2	
3	
4	
$\sum$	

$\boxed{1}$ **(9 Punkte)**

Eine Saite der Länge l (Masse pro Länge μ) ist beidseitig gelagert und mit der Kraft T vorgespannt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist sie wie skizziert sinusförmig mit $w_A(x)$ ausgelenkt und besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit.



(a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Anfangsbedingungen $w(x, t = 0)$, $\dot{w}(x, t = 0)$ an.

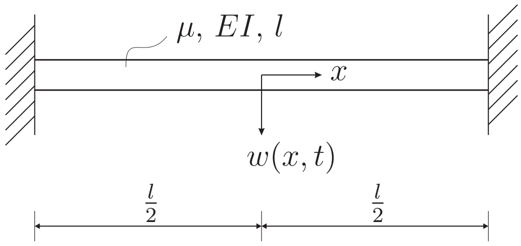
(b) Bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x, t)$ zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{2} l \sqrt{\frac{\mu}{T}}$ mit dem Lösungsansatz nach d'Alembert (eine Herleitung ist nicht erforderlich).

(c) Prüfen Sie ob die Lösung $w(x, t)$ die Randbedingungen erfüllt. Überführen Sie dazu die Lösung nach d'Alembert in die Form $w(x, t) = W(x) \cdot p(t)$ und nutzen Sie dafür die Zusammenhänge $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta$ und $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$.

Geg.: l, T, μ, w_0

$\boxed{2}$ **(11 Punkte)**

Gegeben ist der skizzierte beidseitig eingespannte Euler-Bernoulli-Balken (μ, EI, l).



(a) Skizzieren Sie die ersten beiden Eigenformen (die beiden Eigenformen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen).

(b) Es soll eine Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz über den Rayleigh-Quotienten bestimmt werden. Als Ansatzfunktion soll ein Polynom

$$\tilde{W}_1(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta$$

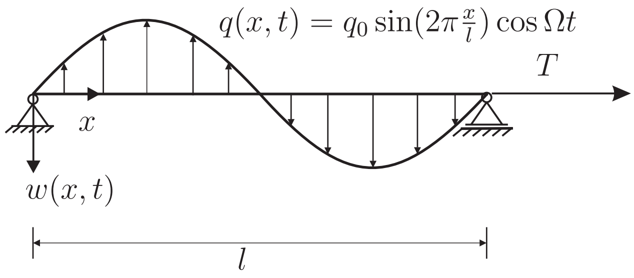
gewählt werden. Bestimmen Sie α und β aus der Anpassung an die geometrischen Randbedingungen. Beachten Sie dafür das gewählte Koordinatensystem und die Symmetrie des Systems. Zeigen Sie, dass $\tilde{W}_1$ alle geometrischen Randbedingungen erfüllt.

(c) Geben Sie damit eine Näherung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 an.
Hinweis: Der nach Einsetzen der Integralgrenzen für $\tilde{\omega}_1$ entstandene Ausdruck muss nicht weiter vereinfacht werden.

Geg.: μ, EI, l

3 (9 Punkte)

Gegeben ist die wie skizziert gelagerte Saite (Masse pro Länge μ, Länge l, Vorspannkraft T) die durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin(2\pi \frac{x}{l}) \cos \Omega t$ angeregt wird. Es ist eine Partikulärlösung mit dem Ansatz $w(x,t) = W(x) \cos \Omega t$ zu bestimmen.



(a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

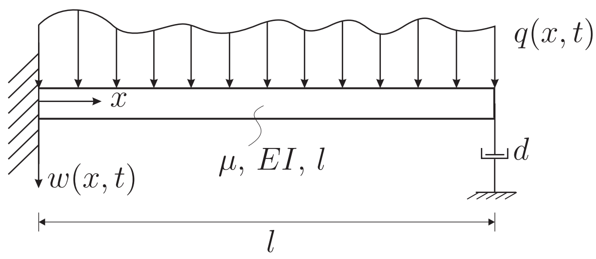
(b) Bestimmen Sie $W(x)$ indem Sie den Ansatz für $w(x,t)$ in die Feldgleichung einsetzen und für $W(x)$ einen Ansatz vom Typ der rechten Seite aufstellen. Zeigen Sie, dass die Lösung die Randbedingungen erfüllt.

(c) Für welches Ω_{krit} tritt Resonanz auf?

Geg.: l, T, μ, Ω, $q(x,t) = q_0 \sin(2\pi \frac{x}{l}) \cos \Omega t$

4 (11 Punkte)

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (μ, EI, l) ist linksseitig eingespannt, an seinem rechten Ende mit einem Dämpfer (Dämpferkonstante d) verbunden, sowie durch eine Streckenlast $q(x,t)$ belastet.



(a) Ermitteln Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U und die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte und Momente δW für Biegeschwingungen $w(x,t)$.

(b) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an.

(c) Bestimmen Sie über das Prinzip von Hamilton die Feldgleichung sowie die dynamischen Randbedingungen.

Geg.: μ, EI, l, $q(x,t)$, d

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

Massenbelegung μ	
Biegesteifigkeit EI	
Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c	

(1 Punkt)

2. Gegeben ist die Feldgleichung für Torsionsschwingungen eines Stabs

$$\rho\ddot{\vartheta}(x,t) - G\vartheta''(x,t) = 0.$$

Wieviele Randbedingungen und wieviele Anfangsbedingungen werden benötigt um $\vartheta(x,t)$ zu bestimmen?

Zahl Randbedingungen ☐ Zahl Anfangsbedingungen ☐

(1 Punkt)

3. Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die folgende Gestalt:

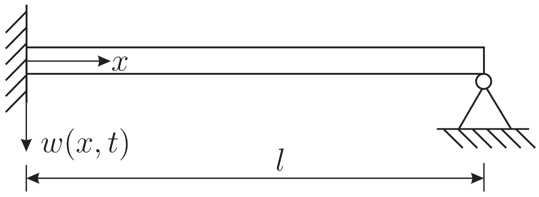
$$w(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct).$$

Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt dabei die in negative x-Richtung laufende Welle?

$\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ ☐ $\frac{1}{2}(f_1 - f_2)$ ☐ f_1 ☐ f_2 ☐

(1 Punkt)

4. Gegeben ist der wie skizziert gelagerte Balken. Geben Sie für die Biegeschwingung $w(x,t)$ die Feldgleichung, die geometrischen sowie die dynamischen Randbedingungen an.



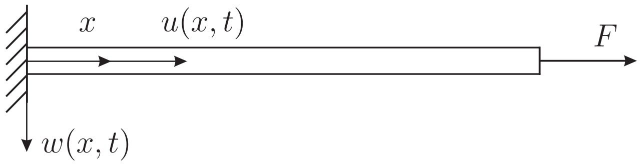
Feldgleichung:

geometrische RBed.:

dynamischen RBed.:

(2 Punkte)

5. Gegeben ist ein Stab/Balken unter konstanter Vorspannkraft $F > 0$.

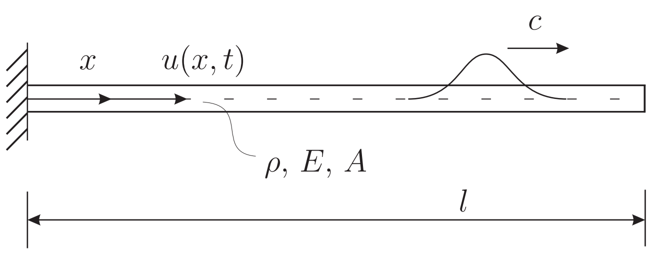


Welchen Einfluss hat F auf die Eigenkreisfrequenzen ω der Stablängsschwingungen bzw. der Biegeschwingungen?

	Stablängsschwingungen	Biegeschwingungen
die Eigenkreisfrequenzen nehmen ab	☐	☐
die Eigenkreisfrequenzen bleiben gleich	☐	☐
die Eigenkreisfrequenzen nehmen zu	☐	☐

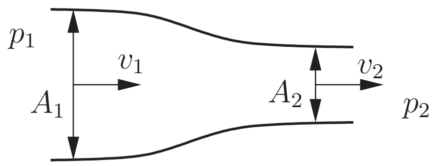
(2 Punkte)

6. In einem Stab (Dichte ρ, E-Modul E, Fläche A) läuft eine Welle auf das freie Ende zu. Wie groß ist die Normalspannung $\sigma(x = l, t)$ während der Wellenreflexion?



(1 Punkt)

7. Eine ideale Flüssigkeit strömt durch ein Rohr mit variablem Querschnitt A. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_2 und den Druck p_2!



Geg.: Querschnittsflächen A_1 und A_2, p_1, v_1

(2 Punkte)

1. Klausur Kontinuumsmechanik SoSe 08, Prof. Dr. U. von Wagner

Bitte deutlich schreiben!

T	
1	
2	
3	
4	
$\sum$	

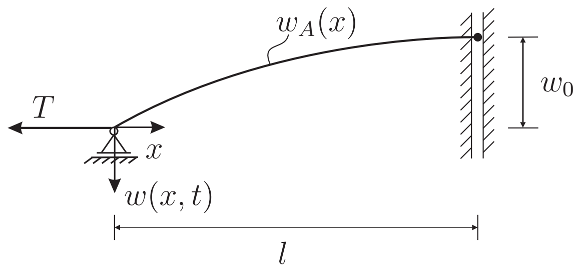
Name, Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

1 (9 Punkte)

Eine Saite der Länge l (Masse pro Länge μ) ist beidseitig gelagert und mit der Kraft T vorgespannt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist sie wie skizziert sinusförmig mit $w_A(x)$ ausgelenkt und besitzt keine Anfangsgeschwindigkeit.



(a) Geben Sie die Feldgleichung, die Randbedingungen sowie die Anfangsbedingungen $w(x, t = 0)$, $\dot{w}(x, t = 0)$ an.

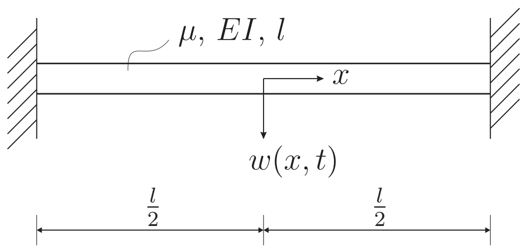
(b) Bestimmen Sie die Durchbiegung $w(x, t)$ zum Zeitpunkt $t_1 = \frac{1}{2} l \sqrt{\frac{\mu}{T}}$ mit dem Lösungsansatz nach d'Alembert (eine Herleitung ist nicht erforderlich).

(c) Prüfen Sie ob die Lösung $w(x, t)$ die Randbedingungen erfüllt. Überführen Sie dazu die Lösung nach d'Alembert in die Form $w(x, t) = W(x) \cdot p(t)$ und nutzen Sie dafür die Zusammenhänge $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ und $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$.

Geg.: l, T, μ, w_0

2 (11 Punkte)

Gegeben ist der skizzierte beidseitig eingespannte Euler-Bernoulli-Balken (μ, EI, l).



(a) Skizzieren Sie die ersten beiden Eigenformen (die beiden Eigenformen mit den niedrigsten Eigenfrequenzen).

(b) Es soll eine Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz über den Rayleigh-Quotienten bestimmt werden. Als Ansatzfunktion soll ein Polynom

$$\tilde{W}_1(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta$$

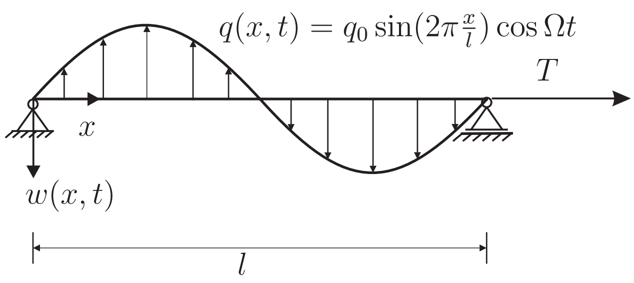
gewählt werden. Bestimmen Sie α und β aus der Anpassung an die geometrischen Randbedingungen. Beachten Sie dafür das gewählte Koordinatensystem und die Symmetrie des Systems. Zeigen Sie, dass $\tilde{W}_1$ alle geometrischen Randbedingungen erfüllt.

(c) Geben Sie damit eine Näherung $\tilde{\omega}_1$ für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 an.
Hinweis: Der nach Einsetzen der Integralgrenzen für $\tilde{\omega}_1$ entstandene Ausdruck muss nicht weiter vereinfacht werden.

Geg.: μ, EI, l

3 (9 Punkte)

Gegeben ist die wie skizziert gelagerte Saite (Masse pro Länge μ, Länge l, Vorspannkraft T) die durch eine Streckenlast $q(x,t) = q_0 \sin(2\pi \frac{x}{l}) \cos \Omega t$ angeregt wird. Es ist eine Partikulärlösung mit dem Ansatz $w(x,t) = W(x) \cos \Omega t$ zu bestimmen.



(a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

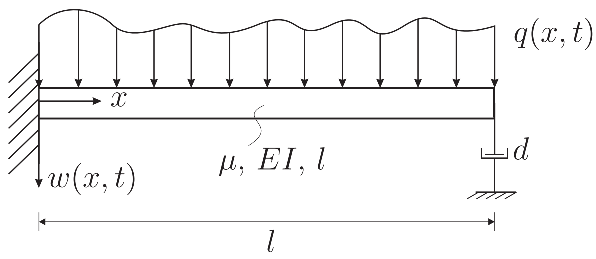
(b) Bestimmen Sie $W(x)$ indem Sie den Ansatz für $w(x,t)$ in die Feldgleichung einsetzen und für $W(x)$ einen <u>Ansatz vom Typ der rechten Seite</u> aufstellen. Zeigen Sie, dass die Lösung die Randbedingungen erfüllt.

(c) Für welches Ω_{krit} tritt Resonanz auf?

Geg.: l, T, μ, Ω, $q(x,t) = q_0 \sin(2\pi \frac{x}{l}) \cos \Omega t$

4 (11 Punkte)

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (μ, EI, l) ist linksseitig eingespannt, an seinem rechten Ende mit einem Dämpfer (Dämpferkonstante d) verbunden, sowie durch eine Streckenlast $q(x,t)$ belastet.



(a) Ermitteln Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U und die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte und Momente δW für Biegeschwingungen $w(x,t)$.

(b) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an.

(c) Bestimmen Sie über das Prinzip von Hamilton die Feldgleichung sowie die dynamischen Randbedingungen.

Geg.: μ, EI, l, $q(x,t)$, d

Theorieaufgaben

1. Geben Sie die Maßeinheiten folgender Größen **ausschließlich** in den Einheiten 1, kg, m und s an:

Massenbelegung μ	$\frac{kg}{m}$
Biegesteifigkeit EI	$\frac{m^3 kg}{s^2}$
Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c	$\frac{m}{s}$

(1 Punkt)

2. Gegeben ist die Feldgleichung für Torsionsschwingungen eines Stabs

$$\rho\ddot{\vartheta}(x,t) - G\vartheta''(x,t) = 0.$$

Wieviele Randbedingungen und wieviele Anfangsbedingungen werden benötigt um $\vartheta(x,t)$ zu bestimmen?

Zahl Randbedingungen $\boxed{2}$ Zahl Anfangsbedingungen $\boxed{2}$

(1 Punkt)

3. Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die folgende Gestalt:

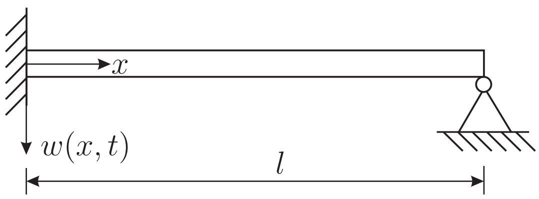
$$w(x,t) = f_1(x-ct) + f_2(x+ct).$$

Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt dabei die in negative x-Richtung laufende Welle?

$\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ ☐ $\frac{1}{2}(f_1-f_2)$ ☐ f_1 ☐ f_2 ☒

(1 Punkt)

4. Gegeben ist der wie skizziert gelagerte Balken. Geben Sie für die Biegeschwingung $w(x,t)$ die Feldgleichung, die geometrischen sowie die dynamischen Randbedingungen an.



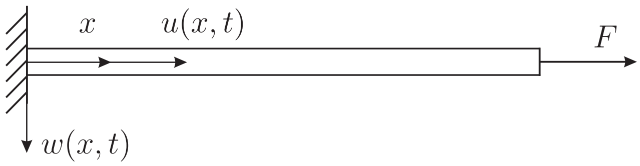
Feldgleichung: $EIw'''' + \mu\ddot{w} = 0$

geometrische RBed.: $w(0,t) = 0,\ w'(0,t) = 0,\ w(l,t) = 0$

dynamischen RBed.: $w''(l,t) = 0$

(2 Punkte)

5. Gegeben ist ein Stab/Balken unter konstanter Vorspannkraft $F > 0$.

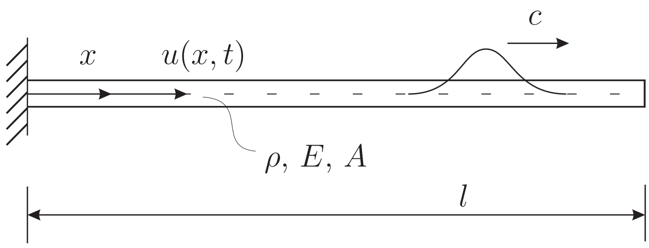


Welchen Einfluss hat F auf die Eigenkreisfrequenzen ω der Stablängsschwingungen bzw. der Biegeschwingungen?

	Stablängsschwingungen	Biegeschwingungen
die Eigenkreisfrequenzen nehmen ab	☐	☐
die Eigenkreisfrequenzen bleiben gleich	X	☐
die Eigenkreisfrequenzen nehmen zu	☐	X

(2 Punkte)

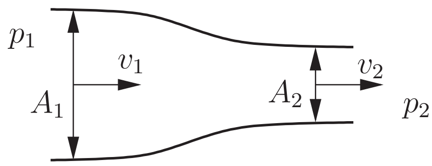
6. In einem Stab (Dichte ρ, E-Modul E, Fläche A) läuft eine Welle auf das freie Ende zu. Wie groß ist die Normalspannung $\sigma(x = l, t)$ während der Wellenreflexion?



$\sigma(x = l, t) = 0$

(1 Punkt)

7. Eine ideale Flüssigkeit strömt durch ein Rohr mit variablem Querschnitt A. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_2 und den Druck p_2!



Geg.: Querschnittsflächen A_1 und A_2, p_1, v_1

$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$

$\frac{1}{2}\rho v + p = \text{const.}$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\rho v_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho \frac{A_1}{A_2} v_1 + p_2$

$\Rightarrow \quad p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1 + p_1 - \frac{1}{2}\rho \frac{A_1}{A_2} v_1 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1 \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)$

(2 Punkte)

Aufgabe 1

(a) Feldgleichung:

$$\ddot{w}(x,t) = c^2 w''(x,t) \tag{1}$$

$$\text{mit} \quad c^2 = \frac{T}{\mu} \tag{2}$$

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \tag{3}$$

$$w'(l,t) = 0 \tag{4}$$

Anfangsbedingungen:

$$w(x,0) = w_0 \sin\frac{\pi x}{2l} \tag{5}$$

$$\dot{w}(x,0) = 0 \tag{6}$$

(b) Bestimmung der Durchbiegung $w(x,t)$ mit dem Lösungsansatz von d'Alembert:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}\left[w_A(x-ct) + w_A(x+ct) + \frac{1}{c}\underbrace{\int_0^\infty w'(\xi)d\xi}_{=0}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[w_0 \sin\frac{\pi}{2l}(x-ct) + w_0\sin\frac{\pi}{2l}(x+ct)\right] \end{aligned} \tag{7}$$

Einsetzten von $t = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}$ und (2) in (7)

$$\begin{aligned} w(x, \frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}}) &= \frac{1}{2}\left[w_0 \sin\frac{\pi}{2l}(x - \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}})\right. \\ &\qquad \left. + w_0 \sin\frac{\pi}{2l}(x + \sqrt{\frac{T}{\mu}}\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\mu}{T}})\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[w_0\sin\frac{\pi}{2l}(x-\frac{l}{2}) + w_0 \sin\frac{\pi}{2l}(x+\frac{l}{2})\right] \end{aligned} \tag{8}$$

(c) Überprüfung der Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad w'(l,t) = 0 \tag{9}$$

Die Gleichung für die Durchbiegung lautet:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0 \sin\left(\frac{x\pi}{2l} - \frac{ct\pi}{2l}\right) + w_0\sin\left(\frac{x\pi}{2l} + \frac{ct\pi}{2l}\right)\right] \tag{10}$$

Anwenden des Additionstheorems und Einführung folgender Abkürzungen

$$A = \frac{x\pi}{2l} \quad \text{und} \quad B = \frac{ct\pi}{2l} \tag{11}$$

lifert:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}w_0\left(\sin A\cos B - \cos A \sin B + \sin A \cos B\right. \\ &\qquad \left. + \cos A \sin B\right) \\ &= \frac{1}{2}w_0\left(2\sin A \cos B\right) \\ &= w_0 \sin A \cos B \\ &= w_0 \sin\frac{x\pi}{2l}\cos\frac{ct\pi}{2l} \end{aligned} \tag{12}$$

Die erste Randbedingung

$$w(0,t) = w_0 \sin 0 \cos B = 0 \tag{13}$$

ist erfüllt. Bestimmung von $w'(x,t)$:

$$w'(x,t) = \frac{1}{2}w_0\frac{\pi}{2l}\left[\cos\left(\frac{x\pi}{2l} - \frac{ct\pi}{2l}\right) + \cos\left(\frac{x\pi}{2l} + \frac{ct\pi}{2l}\right)\right] \tag{14}$$

Anwenden des Additionstheorems liefert:

$$\begin{aligned} w'(x,t) = w_0 \frac{\pi}{4l}&\left[\left(\cos\frac{x\pi}{2l}\cos\frac{ct\pi}{2l} + \sin\frac{x\pi}{2l}\sin\frac{ct\pi}{2l}\right)\right. \\ &\left. + \left(\cos\frac{x\pi}{2l}\cos\frac{ct\pi}{2l} - \sin\frac{x\pi}{2l}\sin\frac{ct\pi}{2l}\right)\right] \end{aligned} \tag{15}$$

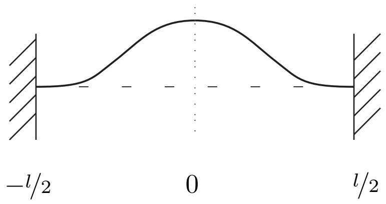
Überprüfen der zweiten Randbedingung:

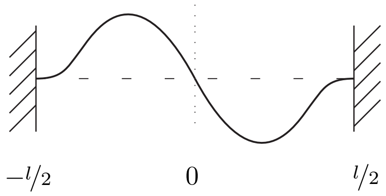
$$\begin{aligned} w'(l,t) = w_0\frac{\pi}{4l}&\left[\left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\cos\frac{ct\pi}{2l} + \sin\frac{\pi}{2}\sin\frac{ct\pi}{2l}\right)\right. \\ &\left. + \left(\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\cos\frac{ct\pi}{2l} - \sin\frac{x\pi}{2l}\sin\frac{ct\pi}{2l}\right)\right] = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

Damit ist auch die zweite Randbedingung erfüllt.

Aufgabe 2

(a)





(b) Symmetrie:

$$\tilde{W}_1(x) = \tilde{W}_1(-x) \tag{17}$$

$$\tilde{W}'_1(x) = -\tilde{W}'_1(-x) \tag{18}$$

Randbedingungen:

$$1.\ \tilde{W}_1(-\frac{l}{2}) = \tilde{W}_1(\frac{l}{2}) = 0 = \frac{l^4}{16} + \alpha\frac{l^2}{4} + \beta \tag{19}$$

$$2.\ \tilde{W}'_1(\frac{l}{2}) = -\tilde{W}'_1(-\frac{l}{2}) = 0 = 4\frac{l^3}{8} + 2\alpha\frac{l}{2} \tag{20}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = -\frac{l^2}{2} \tag{21}$$

$$\Rightarrow \quad \beta = \frac{l^4}{16} \tag{22}$$

Damit ergibt sich

$$\underline{\tilde{W}_1(x) = x^4 - \frac{l^2}{2}x^2 + \frac{l^4}{16}} \tag{23}$$

Rayleigh-Quotient:

$$\tilde{\omega}_k^2 = \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} EI\tilde{W''}_1^2(x)dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mu\tilde{W}_1^2(x)dx} \tag{24}$$

mit

$$\tilde{W''}_1 = 12x^2 - l^2 \tag{25}$$

$$\tilde{W''}_1^2 = 144x^4 - 24x^2l^2 + l^4 \tag{26}$$

$$\tilde{W}_1^2 = x^8 - x^6l^2 + \frac{3x^4l^4}{8} - \frac{x^2l^6}{16} + \frac{l^8}{256} \tag{27}$$

Überprüfen der Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_1\left(\frac{l}{2}\right) &= \left(\frac{l}{2}\right)^4 - \frac{l^2}{2}\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{l^4}{16}\\ &= \frac{l^4}{16} - \frac{l^4}{8} + \frac{l^4}{16}\\ &= 0\end{aligned} \tag{28}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{W'}_1\left(\frac{l}{2}\right) &= 4\frac{l^3}{8} - 2\frac{l^2}{2}\frac{l}{2}\\ &= \frac{l^3}{2} - \frac{l^3}{2} = 0\end{aligned} \tag{29}$$

(c) Einsetzen von (26) und (27) in (24) liefert:

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_k^2 &= \frac{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} EI\left(144x^4 - 24x^2l^2 + l^4\right)dx}{\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \mu\left(x^8 - x^6l^2 + \frac{3x^4l^4}{8} - \frac{x^2l^6}{16} + \frac{l^8}{256}\right)dx}\\ &= \frac{EI\left(\frac{144}{5}x^5 - 8x^3l^2 + xl^4\right)\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}}{\mu\left(\frac{x^9}{9} - \frac{x^7l^2}{7} + \frac{3x^5l^4}{40} - \frac{x^3l^6}{48} + \frac{xl^8}{256}\right)\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}}\end{aligned} \tag{30}$$

Beim Einsetzen der Grenzen fallen die geraden Potenzen weg und die ungeraden Potenzen verdoppeln sich. Alles zusammenfassen liefert:

$$\tilde{\omega}_k^2 = \frac{4EI}{5\mu l^4\left(\frac{1}{4608} - \frac{1}{896} + \frac{3}{1280} - \frac{1}{384} + \frac{1}{256}\right)} \tag{31}$$

Aufgabe 3

(a) Feldgleichung:

$$\mu\ddot{w} - Tw'' = q_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right)\cos\Omega t \tag{32}$$

Randbedingungen:

$$w(0) = 0 \quad \text{und} \quad w(l) = 0 \tag{33}$$

(b) Ansatz:

$$w(x,t) = W(x)\cos\Omega t \tag{34}$$

$$w''(x,t) = W''(x)\cos\Omega t \tag{35}$$

$$\ddot{w}(x,t) = -\Omega^2 W(x)\cos\Omega t \tag{36}$$

Einsetzen der Gleichungen (34) bis (36) in die Feldgleichung liefert:

$$-\mu\Omega^2 W(x)\cos\Omega t - TW''(x)\cos\Omega t = q_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right)\cos\Omega t \tag{37}$$

$$\Rightarrow \quad -\mu\Omega^2 W(x) - TW''(x) = q_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) \tag{38}$$

Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$W(x) = w_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) \tag{39}$$

$$W''(x) = -w_0\frac{4\pi^2}{l^2}\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) \tag{40}$$

Einsetzen von (40) und (39) in (38) führt auf

$$-\mu\Omega^2 w_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) + Tw_0\frac{4\pi^2}{l^2}\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) = q_0\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right)$$

$$-\mu\Omega^2 w_0 + Tw_0\frac{4\pi^2}{l^2} = q_0 \tag{41}$$

$$\Rightarrow \quad w_0\left(-\mu\Omega^2 + T\frac{4\pi^2}{l^2}\right) = q_0 \tag{42}$$

$$\Rightarrow \quad w_0 = \frac{q_0}{-\mu\Omega^2 + T\frac{4\pi^2}{l^2}} \tag{43}$$

$$\Rightarrow \quad W(x) = \frac{q_0}{-\mu\Omega^2 + T\frac{4\pi^2}{l^2}}\sin\left(2\pi\frac{x}{l}\right) \tag{44}$$

Die Randbedingungen (33) sind von der Gleichung (44) auch erfüllt.

(c) Resonanz:

$$\Leftrightarrow \quad -\mu\Omega^2 + T\frac{4\pi^2}{l^2} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \Omega^2 - \frac{4\pi^2 T}{\mu l^2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Omega = \frac{2\pi}{l}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \tag{45}$$

Aufgabe 4

(a) kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2(x,t)dx = \frac{1}{2}\mu\int_0^l \dot{w}^2(x,t)dx \tag{46}$$

potentielle Energie:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2(x,t)dx \tag{47}$$

virtuelle Arbeit:

$$\delta W = \int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)dx - d\dot{w}(l,t)\delta w(l,t) \tag{48}$$

(b) geometrischen Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad w'(0,t) = 0 \tag{49}$$

$$\Rightarrow \quad \delta w(0,t) = 0 \quad \text{und} \quad \delta w'(0,t) = 0 \tag{50}$$

(c) Bestimmung der Feldgleichung mit dem Prinzip von Hamilton:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta W dt = 0 \tag{51}$$

Einsetzen von (46) bis (48) in (51):

$$\begin{aligned} 0 = &\delta \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2}\mu \int_0^l \dot{w}^2(x,t)dx - \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2(x,t)dx \right) dt \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)dx - d\dot{w}(l,t)\delta w(l,t) \right) dt \end{aligned} \tag{52}$$

$$\begin{aligned} 0 = &\mu \int_0^l \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} \dot{w}\delta\dot{w} dt}_{I}\, dx - EI \int_{t_0}^{t_1} \underbrace{\int_0^l w''\delta w'' dx}_{II}\, dt \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)dx - d\dot{w}(l,t)\delta w(l,t) \right) dt \end{aligned} \tag{53}$$

Ausrechnen der einzelnen Integrale:

$$I: \quad \int_{t_0}^{t_1} \dot{w}\delta\dot{w} dt = \underbrace{\dot{w}\delta w|_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \ddot{w}\delta w dt \tag{54}$$

$$\begin{aligned} II: \quad \int_0^l w''\delta w'' dx &= w''\delta w'|_0^l - \int_0^l w'''\delta w' dx \\ &= w''\delta w'|_0^l - w'''\delta w|_0^l + \int_0^l w^{IV}\delta w dx \\ &= w''\delta w'(l) - w'' \underbrace{\delta w'(0)}_{=0,RB} - w'''\delta w(l) \\ &\quad + w''' \underbrace{\delta w(0)}_{=0,RB} + \int_0^l w^{IV}\delta w dx \end{aligned} \tag{55}$$

Einsetzen der Ergebnisse der Berechnung von I und II in (53):

$$\begin{aligned} &\mu \int_0^l \left[\int_{t_0}^{t_1} -\ddot{w}\delta w dt \right] dx \\ &- EI \int_{t_0}^{t_1} \left\{ w''\delta w'(l) - w'''\delta w(l) + \int_0^l w^{IV} d\cdot w dx \right\} dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_0^l q(x,t)\delta w dx - d\cdot\dot{w}\delta w(l) \right\} dt = 0 \end{aligned} \tag{56}$$

Sortieren:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ &\underbrace{\int_0^l \left[-\mu\ddot{w}d\cdot w - EIw^{IV}\delta w + q(x,t)\delta w \right] dx}_{1} \\ &+ \underbrace{[-EIw''(l)\delta w'(l)]}_{2} \\ &+ \underbrace{[EIw'''(l)\delta w(l)] - d\cdot\dot{w}\delta w(l)}_{3} \Bigg\} dt = 0 \end{aligned} \tag{57}$$

Aus 1 folgt unter der Annahme $\delta w \neq 0$ die **Feldgleichung**

$$\underline{\mu\ddot{w} + EIw^{IV} = q(x,t)} \tag{58}$$

Aus 2 fogt unter der Annahme $\delta w'(l) \neq 0$ die **erste dynamische Randbedingung** (Moment bei $x = l$ ist Null)

$$\underline{-EIw''(l) = 0} \tag{59}$$

Aus 3 fogt unter der Annahme $\delta w(l) \neq 0$ die **zweite dynamische Randbedingung** (Querkraft bei $x = l$ ist Null)

$$\underline{EIw'''(l) - d\cdot\dot{w}(l) = 0} \tag{60}$$

MMD Mechatronische Maschinendynamik Dr.-Ing. Daniel Hochlenert	**Kontinuumsmechanik** Sommersemester 2011

Klausur vom 22.07.2011

Name, Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte	10	16	10	9	5	50
erreichte Punkte						
Handzeichen						

Theorieaufgaben

[10 Punkte]

Aufgabe T1

[1 Punkt]

Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die Gestalt

$$w(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct).$$

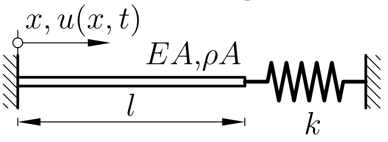
Welche der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in die negative x-Richtung laufende Welle?

☐ $\frac{1}{2}(g+h)$ ☐ $\frac{1}{2}(g-h)$ ☐ g ☐ h

Aufgabe T2

[2 Punkte]

Geben Sie den Rayleigh-Quotienten R für die Stablängsschwingungen des skizzierten Systems an. Verwenden Sie $U(x)=x$ als zulässige Funktion.



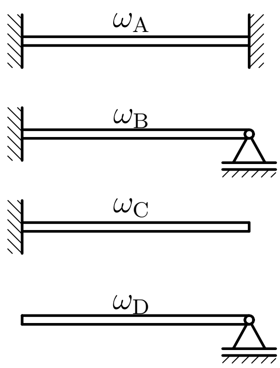
Gegeben: EA, ρA, k, l, $U(x)=x$

$R =$

Aufgabe T3

[2 Punkte]

Die vier skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich nur in der Art ihrer Lagerung. Die jeweils erste Eigenkreisfrequenz der Systeme ist $\omega_{\mathrm{A,B,C,D}}$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.



☐ $\omega_{\mathrm{A}} < \omega_{\mathrm{B}}$ ☐ $\omega_{\mathrm{D}} = 0$

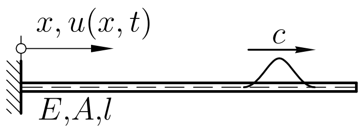
☐ $\omega_{\mathrm{B}} > \omega_{\mathrm{C}}$ ☐ $\omega_{\mathrm{B}} = \omega_{\mathrm{C}} + \omega_{\mathrm{D}}$

☐ $\omega_{\mathrm{C}} > \omega_{\mathrm{A}}$

Aufgabe T4

[1 Punkt]

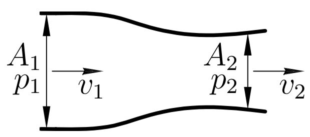
In dem skizzierten Stab (E-Modul E, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Querschnittsfläche A, Länge l) läuft die Welle $u(x,t)$ auf das rechte freie Ende zu. Geben Sie die Normalspannung $\sigma(l,t)$ am rechten Ende an.



$\sigma(l,t) =$

Aufgabe T5 [2 Punkte]

Eine ideale Flüssigkeit (Dichte ρ) strömt durch ein Rohr mit variabler Querschnittsfläche. An einer Stelle mit der Querschnittsfläche A_1 hat die Flüssigkeit den Druck p_1 und die Geschwindigkeit v_1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_2 und den Druck p_2 an der Stelle mit der Querschnittsfläche A_2.



Gegeben: A_1, A_2, p_1, v_1, ρ

Nebenrechnung:

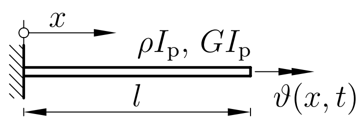
$v_2 =$ ____________________

$p_2 =$ ____________________

Aufgabe T6 [1 Punkt]

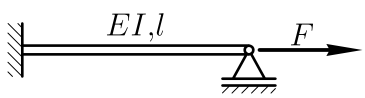
Wie lauten die Randbedingungen für den skizzierten Torsionsstab?

Randbedingungen:



Aufgabe T7 [1 Punkt]

Welchen Einfluss hat eine konstante positive Vorspannkraft F auf die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen des skizzierten Systems? Kreuzen Sie an.



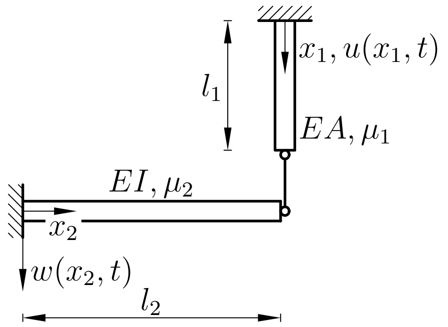
	kleiner	nicht verändert	größer
Die Eigenfrequenzen werden durch die Vorspannkraft	☐	☐	☐

Aufgabe 1

[16 Punkte]

Das skizzierte System besteht aus einem homogenen Dehnstab (Dehnsteifigkeit EA, Massenbelegung μ_1, Länge l_1) und einem homogenen Balken (Biegesteifigkeit EI, Massenbelegung μ_2, Länge l_2, schlank und dehnstarr), die über eine starre Stange (Masse vernachlässigbar) verbunden sind.

Gegeben: EA, EI, μ_1, μ_2, l_1, l_2



a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen) für den Dehnstab und den Balken in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

Bewegungsgleichungen:

Dehnstab: ______________________________

Balken: ______________________________

b) Geben Sie alle Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an. (Hinweis: Zeichnen Sie ggf. ein Freikörperbild.)

Nebenrechnung, ggf. Freikörperbild:

Rand- und Übergangsbedingungen:

c) Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 soll mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten abgeschätzt werden. Welche Bedingungen müssen die Ansatzfunktionen $U(x_1)$ und $W(x_2)$ erfüllen?

Bedingungen für $U(x_1)$ und $W(x_2)$:

d) Wie lautet der Rayleigh-Quotient $R[U(x_1), W(x_2)]$ des Systems? Drücken Sie das Ergebnis nur in den gegebenen Größen sowie $U(x_1)$, $W(x_2)$ und deren Ableitungen aus.

Nebenrechnung:

$R[U(x_1), W(x_2)] =$

e) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) bezüglich des Rayleigh-Quotienten $R[U(x_1), W(x_2)]$ und der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an, wenn $U(x_1)$ und $W(x_2)$ die unter c) gefragten Bedingungen erfüllen.

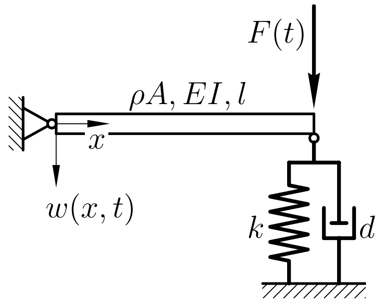
- [ ] $\omega_1^2 > R[U(x_1), W(x_2)]$
- [ ] $\omega_1^2 = R[U_1(x_1), W_1(x_2)]$ falls $U_1(x_1), W_1(x_2)$ erste Eigenform des Systems
- [ ] $\omega_1^2 \leq R[U(x_1), W(x_2)]$

Aufgabe 2

[10 Punkte]

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (ρA, EI, l) ist links gelagert und rechts über eine Feder (Steifigkeit k) sowie einen Dämpfer (Dämpfungskonstante d) abgestützt. Am Ende des Balkens wirkt zusätzlich die Kraft $F(t)$.

Gegeben: ρA, EI, l, k, d, $F(t)$



a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$T =$

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

Nebenrechnung:

$U =$

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW der nicht in U berücksichtigten Kräfte an.

Nebenrechnung:

$\delta W =$

d) Geben Sie alle geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

e) Wie lautet allgemein das Prinzip von Hamilton für das System? Setzten Sie T, U und δW als gegeben voraus.

Prinzip von Hamilton für das System mit T, U und δW gegeben:

f) Nach Ausführen der Variation und partieller Integration liefert das Prinzip von Hamilton für das gegebene System den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2} \Bigg\{ \int_0^l \Big(-\rho A \ddot{w}(x,t) - EI w^{\mathrm{IV}}(x,t) \Big) \delta w(x,t)\, \mathrm{d}x + \Big(F(t) - k w(l,t) - d\dot{w}(l,t) \Big) \delta w(l,t)$$
$$+ \Big[EI w'''(x,t) \delta w(x,t) - EI w''(x,t) \delta w'(x,t) \Big]_0^l \Bigg\} \mathrm{d}t + \left[\int_0^l \rho A \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Geben Sie damit die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) des Systems und die natürlichen (dynamischen) Randbedingungen an.

Bewegungsgleichung:
natürliche Randbedingungen:

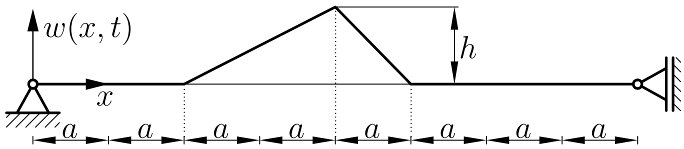
g) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- ☐ Konservative Lasten können entweder über ihr Potential oder ihre virtuelle Arbeit berücksichtigt werden.
- ☐ Das Prinzip von Hamilton ist nicht anwendbar, wenn verteilte nichtkonservative Lasten auftreten.
- ☐ Bei nichtkonservativen Systemen liefert das Prinzip von Hamilton nur eine obere Schranke für die erste Eigenkreisfrequenz.

Aufgabe 3

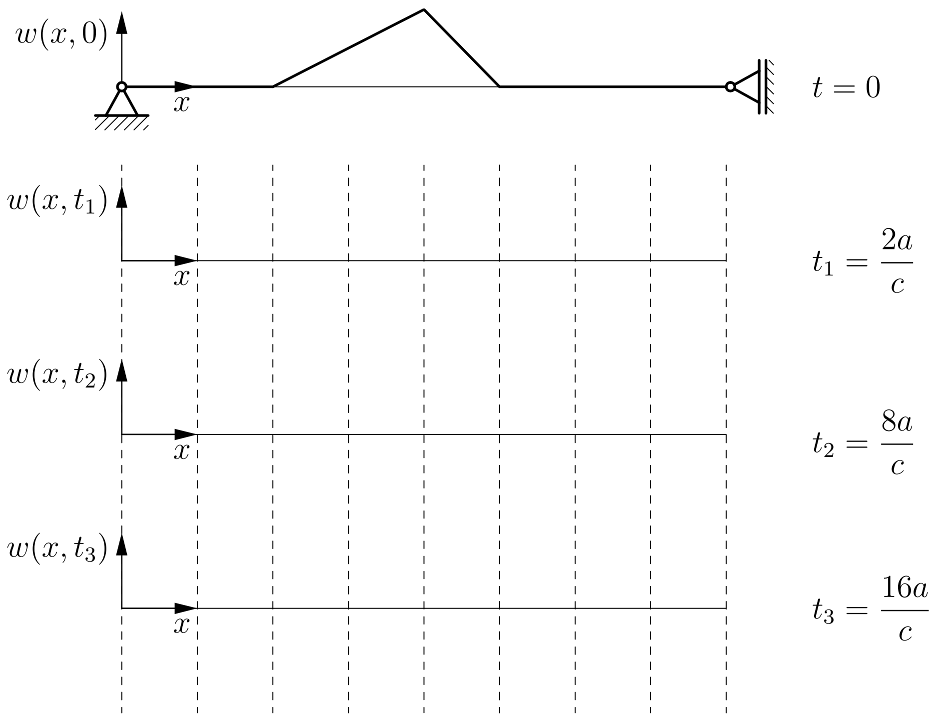
[9 Punkte]

Die fest-frei gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $8a$) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1=2a/c$, $t_2=8a/c$, $t_3=16a/c$ einzeichnen.



b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

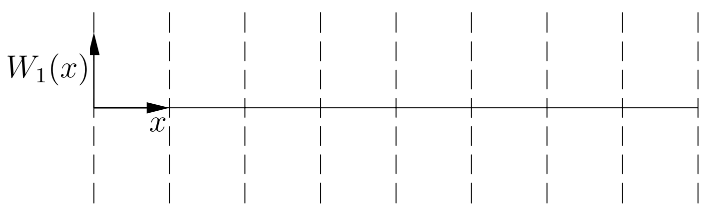
$T =$

c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

$\omega_1 =$

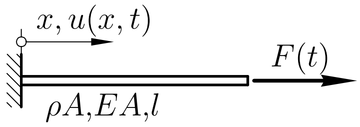
d) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.

1. Eigenform



Aufgabe 4

[5 Punkte]



Der skizzierte Dehnstab (ρA, EA, l) wird am rechten Ende durch die Kraft $F(t)$ zu Schwingungen angeregt.

Gegeben: ρA, EA, l, $F(t)$

a) Geben Sie die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) für den Dehnstab in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

Bewegungsgleichung:

b) Geben Sie alle Randbedingungen an.

Nebenrechnung, Skizze:

Randbedingungen:

c) Die Kraft $F(t) = \hat{F} \cos \Omega t$ sei nun harmonisch (Ω gegeben). Machen Sie einen Ansatz zur Berechnung der eingeschwungenen Bewegung $u_{\mathrm{P}}(x,t)$ des System.

$u_{\mathrm{P}}(x,t) =$

d) Gibt es Erregerkreisfrequenzen Ω^*, für die das rechte Ende des Dehnstabs trotz der Anregung $F(t) = \hat{F} \cos \Omega^* t$ in Ruhe bleiben kann? Kreuzen Sie an und begründen Sie ihre Antwort!

☐ Das ist nicht möglich. ☐ Es gibt genau ein Ω^*.

☐ Es gibt unendlich viele Ω^*.

Begründung:

Lösungsvorschlag zur Klausur vom 22.07.2011

Lösungsvorschlag

Theorieaufgaben [10 Punkte]

Aufgabe T1 [1 Punkt]

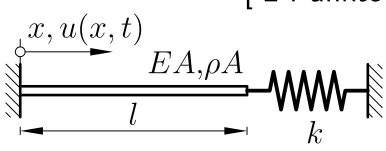
Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die Gestalt

$$w(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct).$$

Welche der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in die negative x-Richtung laufende Welle?

☐ $\frac{1}{2}(g+h)$	☐ $\frac{1}{2}(g-h)$	☐ g	☒ h 1

Aufgabe T2 [2 Punkte]

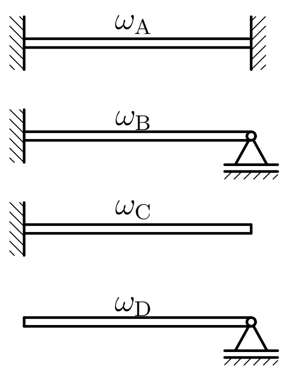


Geben Sie den Rayleigh-Quotienten R für die Stablängsschwingungen des skizzierten Systems an. Verwenden Sie $U(x)=x$ als zulässige Funktion.

Gegeben: EA, ρA, k, l, $U(x)=x$

$$R = \frac{\frac{1}{2}\int_0^l EA\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}kl^2}{\frac{1}{2}\int_0^l \rho A x^2\,\mathrm{d}x} = 3\,\frac{EA+kl}{\rho A l^2} \quad 2$$

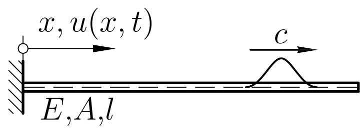
Aufgabe T3 [2 Punkte]



Die vier skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich nur in der Art ihrer Lagerung. Die jeweils erste Eigenkreisfrequenz der Systeme ist $\omega_{A,B,C,D}$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

☐ $\omega_A < \omega_B$	☒ $\omega_D = 0$ 1
☒ $\omega_B > \omega_C$ 1	☐ $\omega_B = \omega_C + \omega_D$
☐ $\omega_C > \omega_A$	

Aufgabe T4 [1 Punkt]

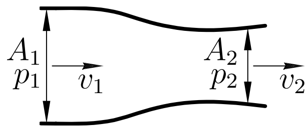


In dem skizzierten Stab (E-Modul E, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Querschnittsfläche A, Länge l) läuft die Welle $u(x,t)$ auf das rechte freie Ende zu. Geben Sie die Normalspannung $\sigma(l,t)$ am rechten Ende an.

$$\sigma(l,t) = 0 \quad 1$$

Aufgabe T5 [2 Punkte]

Eine ideale Flüssigkeit (Dichte ρ) strömt durch ein Rohr mit variabler Querschnittsfläche. An einer Stelle mit der Querschnittsfläche A_1 hat die Flüssigkeit den Druck p_1 und die Geschwindigkeit v_1. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_2 und den Druck p_2 an der Stelle mit der Querschnittsfläche A_2.



Gegeben: A_1, A_2, p_1, v_1, ρ

Nebenrechnung:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

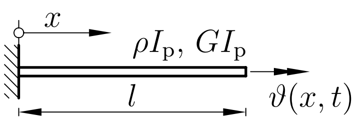
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} \quad 1$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2}\right) \quad 1$$

Aufgabe T6 [1 Punkt]

Wie lauten die Randbedingungen für den skizzierten <u>Torsionsstab</u>?

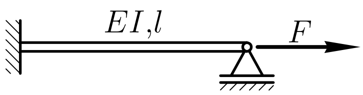


Randbedingungen:

$\vartheta(0,t) = 0$ $\quad\quad$ $\vartheta'(l,t) = 0$ oder $GI_\text{p}\vartheta'(l,t) = 0$ 1

Aufgabe T7 [1 Punkt]

Welchen Einfluss hat eine konstante positive Vorspannkraft F auf die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen des skizzierten Systems? Kreuzen Sie an.

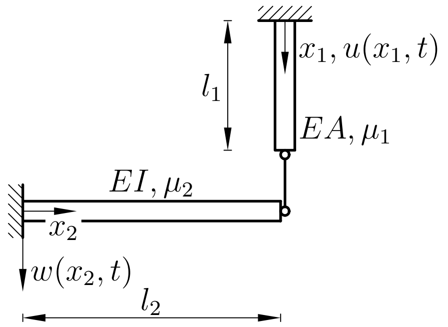


Die Eigenfrequenzen werden durch die Vorspannkraft 1	kleiner	nicht verändert	größer
	☐	☐	☒

Aufgabe 1

[16 Punkte]

Das skizzierte System besteht aus einem homogenen Dehnstab (Dehnsteifigkeit EA, Massenbelegung μ_1, Länge l_1) und einem homogenen Balken (Biegesteifigkeit EI, Massenbelegung μ_2, Länge l_2, schlank und dehnstarr), die über eine starre Stange (Masse vernachlässigbar) verbunden sind.



Gegeben: EA, EI, μ_1, μ_2, l_1, l_2

a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen) für den Dehnstab und den Balken in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

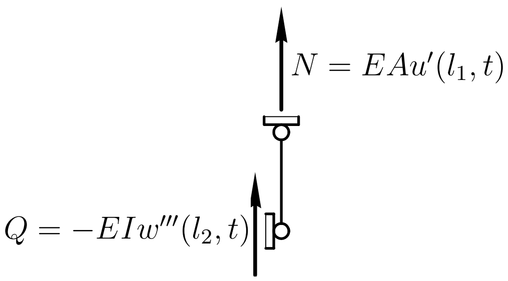
Bewegungsgleichungen:

Dehnstab: $\mu_1 \ddot{u}(x_1,t) - EAu''(x_1,t) = 0$ 1

Balken: $\mu_2 \ddot{w}(x_2,t) + EIw^{\mathrm{IV}}(x_2,t) = 0$ 1

b) Geben Sie alle Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an. (Hinweis: Zeichnen Sie ggf. ein Freikörperbild.)

Nebenrechnung, ggf. Freikörperbild:



Rand- und Übergangsbedingungen:

$u(0,t) = 0$ 1 $\quad w(0,t) = 0$ 1 $\quad w'(0,t) = 0$ 1

$EIw''(l_2,t) = 0$ 1

$-EIw'''(l_2,t) + EAu'(l_1,t) = 0$ 1 $\quad w(l_2,t) = u(l_1,t)$ 1

c) Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 soll mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten abgeschätzt werden. Welche Bedingungen müssen die Ansatzfunktionen $U(x_1)$ und $W(x_2)$ erfüllen?

Bedingungen für $U(x_1)$ und $W(x_2)$:

$$U(0) = 0 \qquad W(0) = 0 \qquad W'(0) = 0 \qquad U(l_1) = W(l_2) \quad 1$$

d) Wie lautet der Rayleigh-Quotient $R[U(x_1), W(x_2)]$ des Systems? Drücken Sie das Ergebnis nur in den gegebenen Größen sowie $U(x_1)$, $W(x_2)$ und deren Ableitungen aus.

Nebenrechnung:

$$T[\dot{u}(x_1,t), \dot{w}(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \mu_1 \dot{u}^2(x_1,t)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} \mu_2 \dot{w}^2(x_2,t)\mathrm{d}x_2 \quad 2$$

$$U[u(x_1,t), w(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} EA{u'}^2(x_1,t)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} EI{w''}^2(x_2,t)\mathrm{d}x_2 \quad 2$$

$$R[U(x_1), W(x_2)] = \frac{U[U(x_1), W(x_2)]}{T[U(x_1), W(x_2)]}$$

$$R[U(x_1), W(x_2)] = \frac{\displaystyle\int_0^{l_1} EA\,{U'}^2(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_0^{l_2} EI\,{W''}^2(x_2)\mathrm{d}x_2}{\displaystyle\int_0^{l_1} \mu_1 U^2(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_0^{l_2} \mu_2 W^2(x_2)\mathrm{d}x_2} \quad 1$$

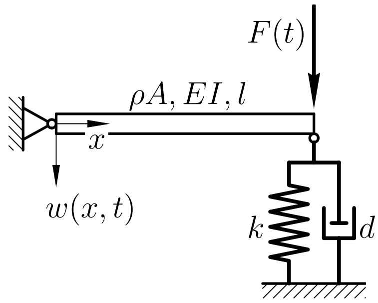
e) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) bezüglich des Rayleigh-Quotienten $R[U(x_1), W(x_2)]$ und der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an, wenn $U(x_1)$ und $W(x_2)$ die unter c) gefragten Bedingungen erfüllen.

- [ ] $\omega_1^2 > R[U(x_1), W(x_2)]$
- [x] $\omega_1^2 = R[U_1(x_1), W_1(x_2)]$ falls $U_1(x_1), W_1(x_2)$ erste Eigenform des Systems 1
- [x] $\omega_1^2 \leq R[U(x_1), W(x_2)]$ 1

Aufgabe 2

[10 Punkte]

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (ρA, EI, l) ist links gelagert und rechts über eine Feder (Steifigkeit k) sowie einen Dämpfer (Dämpfungskonstante d) abgestützt. Am Ende des Balkens wirkt zusätzlich die Kraft $F(t)$.



Gegeben: ρA, EI, l, k, d, $F(t)$

a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \dot{w}^2(x,t)\mathrm{d}x \quad 1$$

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

Nebenrechnung:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}kw^2(l,t) \quad 1$$

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW der nicht in U berücksichtigten Kräfte an.

Nebenrechnung:

$$\delta W = F(t)\delta w(l,t) - d\dot{w}(l,t)\delta w(l,t) \quad 1$$

d) Geben Sie alle geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \quad 1$$

e) Wie lautet allgemein das Prinzip von Hamilton für das System? Setzten Sie T, U und δW als gegeben voraus.

Prinzip von Hamilton für das System mit T, U und δW gegeben:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2} \delta W \mathrm{d}t \quad 1$$

f) Nach Ausführen der Variation und partieller Integration liefert das Prinzip von Hamilton für das gegebene System den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \Big(-\rho A \ddot{w}(x,t) - EIw^{\mathrm{IV}}(x,t) \Big) \delta w(x,t)\, \mathrm{d}x + \Big(F(t) - kw(l,t) - d\dot{w}(l,t) \Big) \delta w(l,t) \right.$$
$$\left. + \Big[EIw'''(x,t)\delta w(x,t) - EIw''(x,t)\delta w'(x,t) \Big]_0^l \right\} \mathrm{d}t + \left[\int_0^l \rho A \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Geben Sie damit die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) des Systems und die natürlichen (dynamischen) Randbedingungen an.

Bewegungsgleichung:

$$\rho A \ddot{w}(x,t) + EIw^{\mathrm{IV}}(x,t) = 0 \quad 1$$

natürliche Randbedingungen:

$$F(t) - kw(l,t) - d\dot{w}(l,t) + EIw'''(l,t) = 0$$

$$EIw''(0,t) = 0 \qquad 3$$

$$EIw''(l,t) = 0$$

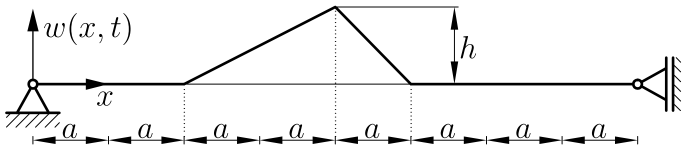
g) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- [x] Konservative Lasten können entweder über ihr Potential oder ihre virtuelle Arbeit berücksichtigt werden. 1
- [ ] Das Prinzip von Hamilton ist nicht anwendbar, wenn verteilte nichtkonservative Lasten auftreten.
- [ ] Bei nichtkonservativen Systemen liefert das Prinzip von Hamilton nur eine obere Schranke für die erste Eigenkreisfrequenz.

Aufgabe 3

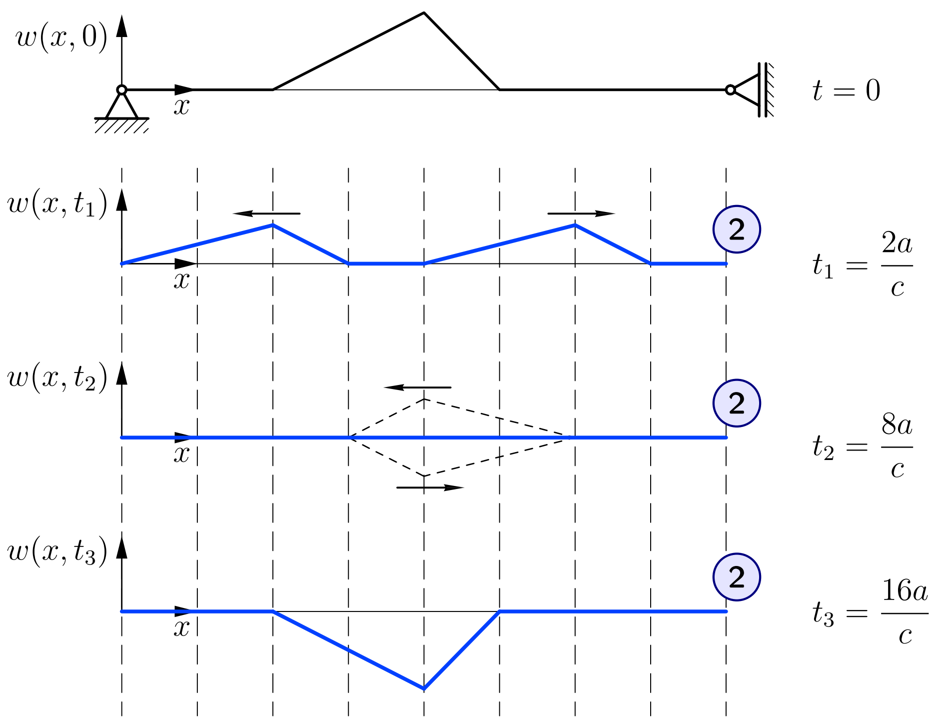
[9 Punkte]

Die fest-frei gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $8a$) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1=2a/c$, $t_2=8a/c$, $t_3=16a/c$ einzeichnen.



b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

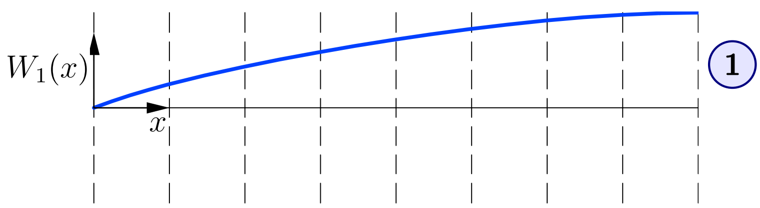
$$T = \frac{32a}{c} \quad 1$$

c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{16a} \quad 1$$

d) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.

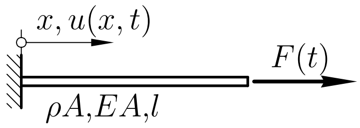
1. Eigenform



Aufgabe 4

[5 Punkte]

Der skizzierte Dehnstab (ρA, EA, l) wird am rechten Ende durch die Kraft $F(t)$ zu Schwingungen angeregt.



Gegeben: ρA, EA, l, $F(t)$

a) Geben Sie die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) für den Dehnstab in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

Bewegungsgleichung:

$\rho A \ddot{u}(x,t) - EAu''(x,t) = 0$ 1

b) Geben Sie alle Randbedingungen an.

Nebenrechnung, Skizze:

Randbedingungen:

$u(0,t) = 0$ $\qquad EAu'(l,t) = F(t)$ 1

c) Die Kraft $F(t) = \hat{F}\cos\Omega t$ sei nun harmonisch (Ω gegeben). Machen Sie einen Ansatz zur Berechnung der eingeschwungenen Bewegung $u_P(x,t)$ des System.

$u_P(x,t) = U(x)\cos\Omega t$ 1

d) Gibt es Erregerkreisfrequenzen Ω^*, für die das rechte Ende des Dehnstabs trotz der Anregung $F(t) = \hat{F}\cos\Omega^* t$ in Ruhe bleiben kann? Kreuzen Sie an und begründen Sie ihre Antwort!

☐ Das ist nicht möglich. ☐ Es gibt genau ein Ω^*.

☒ Es gibt unendlich viele Ω^*. 2

Begründung:

Für alle Erregerkreisfrequenzen Ω^*, die Eigenkreisfrequenzen des fest-fest gelagerten Dehnstabs sind, kann das rechte Ende des Dehnstabs bei geeigneten Anfangsbedingungen in Ruhe bleiben.

Punkte nur bei schlüssiger Begründung und richtigem Kreuz.

MMD Mechatronische Maschinendynamik Dr.-Ing. Daniel Hochlenert	**Kontinuumsmechanik** Sommersemester 2011

Klausur vom 10.10.2011

______________________________ Name, Vorname

____________________ Matrikelnummer

________________________ Studiengang

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Zum Bestehen der Klausur sind mindestens 5 Punkte aus den Theorieaufgaben und mindestens 20 Punkte insgesamt erforderlich. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.

Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	A5	$\sum$
Punkte	10	15	9	6	4	6	50
erreichte Punkte							
Handzeichen							

Theorieaufgaben

[10 Punkte]

Aufgabe T1

[1 Punkt]

Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die Gestalt

$$w(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct).$$

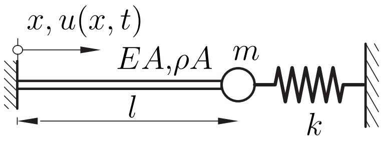
Welche der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in die positive x-Richtung laufende Welle?

☐ g ☐ h ☐ $\frac{1}{2}(g+h)$ ☐ $\frac{1}{2}(g-h)$

Aufgabe T2

[2 Punkte]

Geben Sie den Rayleigh-Quotienten R für die Stablängsschwingungen des skizzierten Systems an. Verwenden Sie $U(x) = x$ als zulässige Funktion. Die Feder sei für $u(l,t) = 0$ entspannt.
Gegeben: EA, ρA, k, l, m, $U(x) = x$

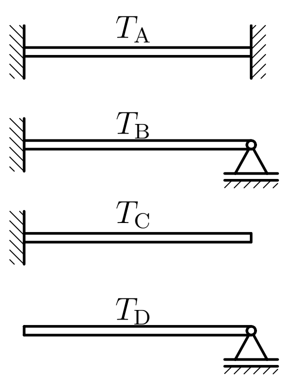


$R =$

Aufgabe T3

[1 Punkt]

Die vier skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich nur in der Art ihrer Lagerung. Die jeweilige Periodendauer der ersten Eigenform der Systeme ist $T_{\mathrm{A,B,C,D}}$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.



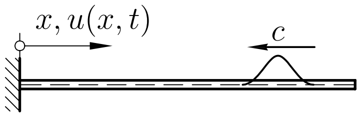
☐ $T_{\mathrm{A}} < T_{\mathrm{B}}$ ☐ $T_{\mathrm{D}} = \infty$

☐ $T_{\mathrm{B}} > T_{\mathrm{C}}$ ☐ $T_{\mathrm{D}} = T_{\mathrm{B}} - T_{\mathrm{C}}$

☐ $T_{\mathrm{D}} = 0$

Aufgabe T4 [3 Punkte]

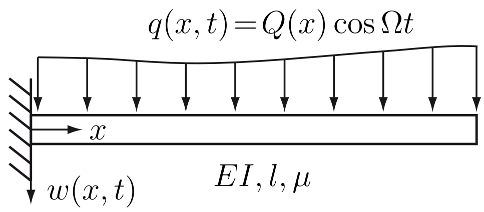
In dem skizzierten Stab (E-Modul E, Flächenträgheitsmoment I, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Querschnittsfläche A, Länge l) läuft die Welle der gegebenen Funktion $u(x,t)$ auf das linke eingespannte Ende zu. Kreuzen Sie an!



	richtig	falsch
Die Eigenkreisfrequenzen des Systems hängen von der Form der Welle $u(x,t)$ ab.	☐	☐
Am linken Ende nimmt bei der Wellenreflektion die mechanische Energie des Systems ab.	☐	☐
Die erste Eigenkreisfrequenz ist $4\pi\frac{l}{c}$.	☐	☐

Aufgabe T5 [2 Punkte]

Gegeben sei skizzierter Biegebalken (EI, l, μ) der an der linken Seite fest eingespannt ist. Belastet wird das System durch eine Streckenlast $q(x,t) = Q(x)\cos\Omega t$. Geben Sie die Randbedingungen sowie einen Ansatz für die partikuläre Lösung an.



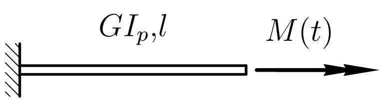
Gegeben: EI, l, μ, $Q(x)$, Ω

Randbedingungen:

Ansatz:

Aufgabe T6 [1 Punkt]

Welchen Einfluss hat ein zeitabhängiges äußeres Moment $M(t)$ auf die Eigenfrequenzen der Torsionsschwingungen des skizzierten Systems? Kreuzen Sie an.

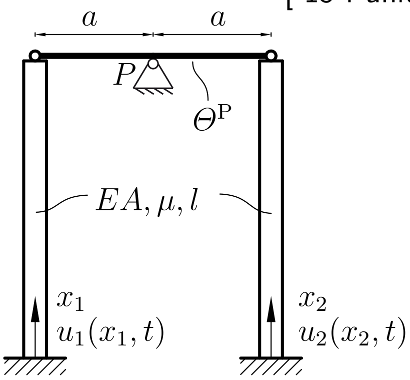


	kleiner	nicht verändert	größer
Die Eigenfrequenzen werden durch das Moment	☐	☐	☐

Aufgabe 1

[15 Punkte]

Das skizzierte System besteht aus zwei homogenen Dehnstäben (Dehnsteifigkeit EA, Massenbelegung μ, Länge l) die über eine **starre** Stange (Massenträgheitsmoment Θ^{P}, Masse vernachlässigbar, in Punkt P gelagert) verbunden sind.



Gegeben: EA, μ, a, l, Θ^{P}

a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen) für die beiden Dehnstäbe in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

Bewegungsgleichungen:

Dehnstab 1: ______________________________

Dehnstab 2: ______________________________

b) Geben Sie alle Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an. (Hinweis: Zeichnen Sie ggf. ein Freikörperbild.)

Nebenrechnung, ggf. Freikörperbild:

Rand- und Übergangsbedingungen:

c) Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 soll mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten abgeschätzt werden. Welche Bedingungen müssen die Ansatzfunktionen $U_1(x_1)$ und $U_2(x_2)$ erfüllen?

Bedingungen für $U_1(x_1)$ und $U_2(x_2)$:

d) Wie lautet der Rayleigh-Quotient $R[U_1(x_1), U_2(x_2)]$ des Systems? Drücken Sie das Ergebnis nur in den gegebenen Größen sowie $U_1(x_1)$, $U_2(x_2)$ und deren Ableitungen aus.

Nebenrechnung:

$R[U_1(x_1), U_2(x_2)] =$

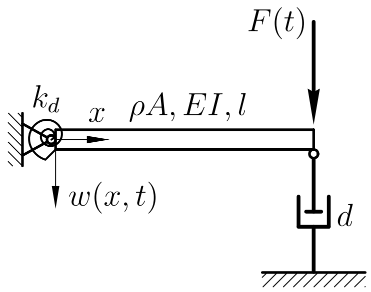
e) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) bezüglich der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

- ☐ Bei zunehmendem Massenträgheitsmoment Θ^{P} sinkt die erste Eigenkreisfrequenz.
- ☐ Bei zunehmendem Massenträgheitsmoment Θ^{P} steigt die erste Eigenkreisfrequenz.
- ☐ Das Massenträgheitsmoment Θ^{P} hat keinen Einfluss auf die erste Eigenkreisfrequenz.

Aufgabe 2

[9 Punkte]

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (ρA, EI, l) ist links gelagert und rechts über einen Dämpfer (Dämpfungskonstante d) abgestützt. Am linken Lager ist zusätzlich eine Drehfeder (Federsteifigkeit k_d) angebracht. Am rechten Ende des Balkens wirkt die Kraft $F(t)$. Die Feder ist für die skizzierte Lage entspannt.



Gegeben: ρA, EI, l, k_d, d, $F(t)$

a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$T =$

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

Nebenrechnung:

$U =$

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW der nicht in U berücksichtigten Kräfte an.

Nebenrechnung:

$\delta W =$

d) Geben Sie alle geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

e) Nach Ausführen der Variation und partieller Integration liefert das Prinzip von Hamilton für das gegebene System den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \Big(-\rho A \ddot{w}(x,t) - EI w^{\mathrm{IV}}(x,t) \Big) \delta w(x,t) \,\mathrm{d}x + \Big(F(t) - d\dot{w}(l,t) \Big) \delta w(l,t) \right.$$
$$\left. - k_d w'(0,t) \delta w'(0,t) + \Big[EI w'''(x,t) \delta w(x,t) - EI w''(x,t) \delta w'(x,t) \Big]_0^l \right\} \mathrm{d}t$$
$$+ \left[\int_0^l \rho A \dot{w}(x,t) \delta w(x,t) \mathrm{d}x \right]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Geben Sie damit die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) des Systems und die natürlichen (dynamischen) Randbedingungen an.

Bewegungsgleichung:
natürliche Randbedingungen:

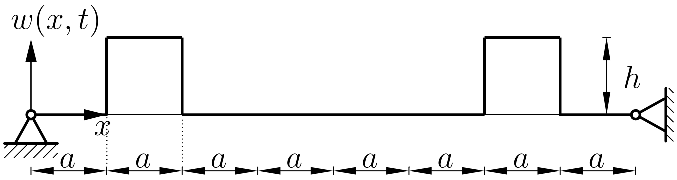
f) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- [ ] Reibungskräfte können entweder über ihr Potential oder ihre virtuelle Arbeit berücksichtigt werden.
- [ ] Das Prinzip von Hamilton ist nicht anwendbar wenn verteilte, zeitabhängige Lasten auftreten.
- [ ] Das Prinzip von Hamilton liefert bei Vorgabe der natürlichen Randbedingungen die Feldgleichung und die geometrischen Randbedingungen.

Aufgabe 3

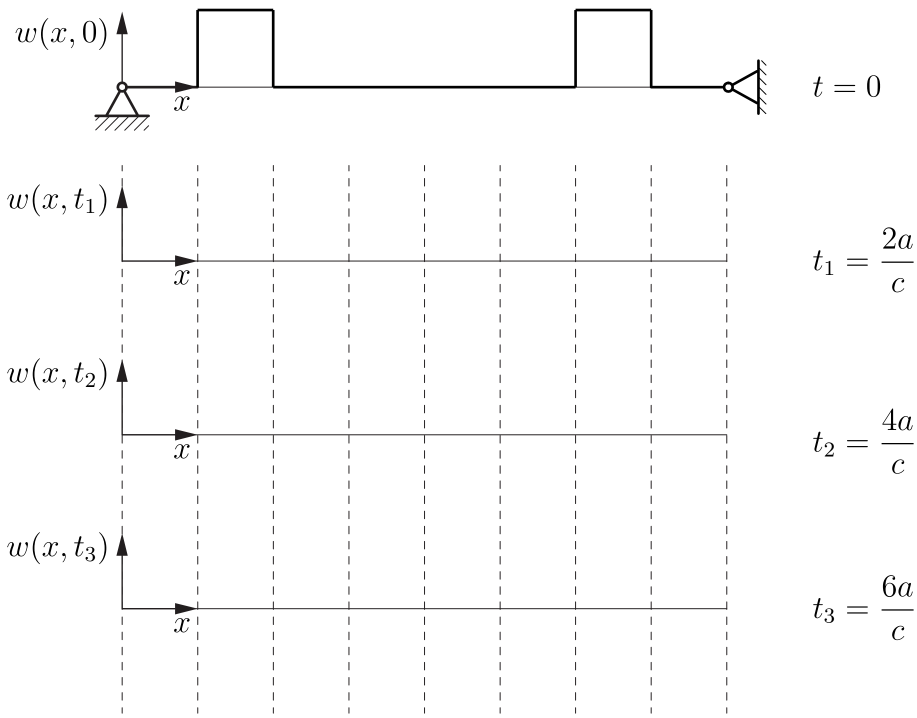
[6 Punkte]

Die fest- fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $8a$) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a, h

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1 = 2a/c$, $t_2 = 4a/c$, $t_3 = 6a/c$ einzeichnen. Kennzeichnen Sie die Richtung der jeweiligen Wellenausbreitung.



b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

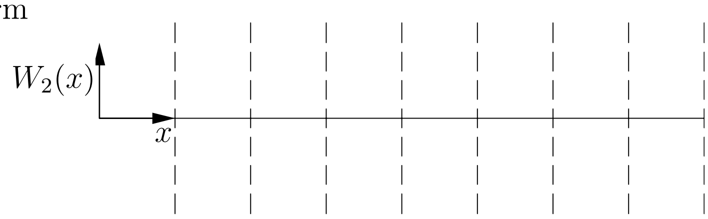
$T =$

c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

$\omega_1 =$

d) Skizzieren Sie die zweite Eigenform $W_2(x)$ der Saite.

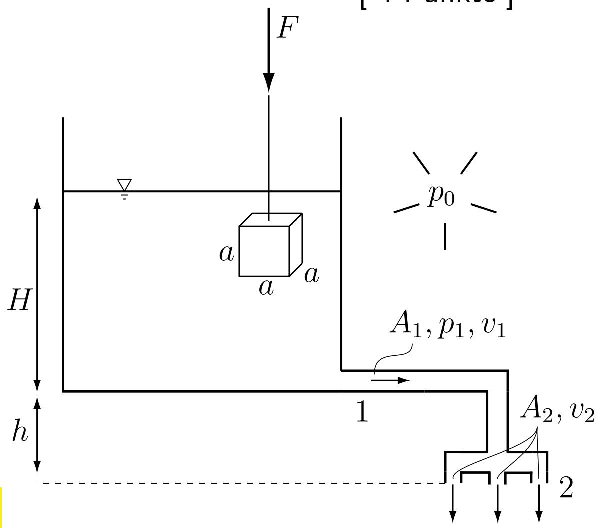
zweite Eigenform



Aufgabe 4

[4 Punkte]

Eine Flüssigkeit unbekannter Dichte befindet sich in einem Behälter. Der Füllstand H kann als konstant angenommen werden. Ein Würfel der Kantenlänge a wird mit der Kaft F vollständig unter der Oberfläche gehalten. Aus einem Rohr des Querschnittes A_1 fließt die Flüssigkeit durch einen Dreifach-Ausfluss (jeweils Querschnittsfläche A_2, Austrittsgeschwindigkeit v_2) in die Umgebung. An der Stelle 1 habe die Flüssigkeit den bekannten Druck p_1.



Gegeben: F, H, h, a, p_1, v_2, g, p_0

Ergänzung gegenüber ursprünglicher Aufgabenstellung: Gewichtskraft des Würfels ist zu vernachlässigen.

a) Wie groß ist die Dichte ρ der Flüssigkeit in Abhängigkeit der gegeben Größen?

Nebenrechung:

$\rho =$

b) Berechnen Sie nun für gegebene Geschwindgkeit v_2 das nötige Querschnittsverhältnis $\frac{A_1}{A_2}$. **Nehmen Sie die Dichte ρ jetzt als gegeben an.**

Nebenrechnung:

Querschnittsverhältnis:

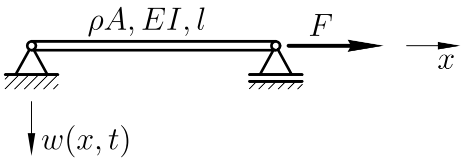
$\frac{A_1}{A_2} =$

Aufgabe 5

[6 Punkte]

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (ρA, EI, l) ist **mit der konstanten positiven Kraft** F **vorgespannt**.

Gegeben: ρA, EI, l, F



a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$T =$

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an. Berücksichtigen Sie auch F in der potentiellen Energie.

Nebenrechnung:

$U =$

c) Welche der folgenden Funktionen können als Ansatzfunktionen zur Abschätzung der ersten Eigenkreisfrequenz des Systems mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten verwendet werden? Kreuzen Sie an.

☐ $W_1(x) = x(x+l)$ ☐ $W_2(x) = \sin \pi \dfrac{x}{l}$ ☐ $W_3(x) = \sinh \dfrac{x}{l}$

d) Gegeben sind nun die Ansatzfunktionen $W_\mathrm{A}(x)=x(x-l)$ und $W_\mathrm{B}(x)=x^2(x-l)$. Berechnen Sie, welche der beiden Ansatzfunktionen die beste Abschätzung für die erste Eigenkreisfrequenz des Systems liefert.

Gegeben:

$$W_\mathrm{A}(x) = x(x-l), \qquad W_\mathrm{B}(x) = x^2(x-l)$$

Nebenrechnung:

Die beste Abschätzung liefert: ____________

Lösungsvorschlag zur Klausur vom 10.10.2011

Lösungsvorschlag

Theorieaufgaben

[10 Punkte]

Aufgabe T1

[1 Punkt]

Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die Gestalt

$$w(x,t) = g(x-ct) + h(x+ct).$$

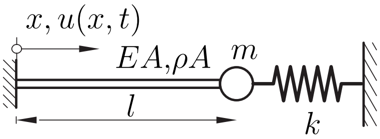
Welche der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in die positive x-Richtung laufende Welle?

[X] g 1	[ ] h	[ ] $\frac{1}{2}(g+h)$	[ ] $\frac{1}{2}(g-h)$

Aufgabe T2

[2 Punkte]

Geben Sie den Rayleigh-Quotienten R für die Stablängsschwingungen des skizzierten Systems an. Verwenden Sie $U(x) = x$ als zulässige Funktion. Die Feder sei für $u(l,t) = 0$ entspannt.
Gegeben: EA, ρA, k, l, m, $U(x) = x$

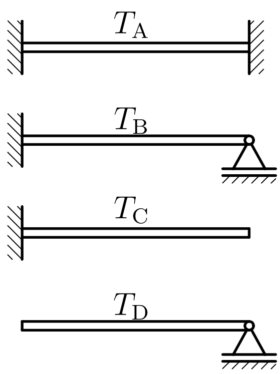


$$R = \frac{\frac{1}{2}\int_0^l EA\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}kl^2}{\frac{1}{2}\int_0^l \rho A x^2\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}ml^2} = \frac{EA + kl}{\frac{1}{3}\rho A l^2 + ml} \quad 2$$

Aufgabe T3

[1 Punkt]

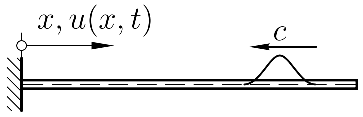
Die vier skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich nur in der Art ihrer Lagerung. Die jeweilige Periodendauer der ersten Eigenform der Systeme ist $T_{\mathrm{A,B,C,D}}$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.



[X] $T_\mathrm{A} < T_\mathrm{B}$	[X] $T_\mathrm{D} = \infty$
[ ] $T_\mathrm{B} > T_\mathrm{C}$	[ ] $T_\mathrm{D} = T_\mathrm{B} - T_\mathrm{C}$
[ ] $T_\mathrm{D} = 0$	1

Aufgabe T4 [3 Punkte]

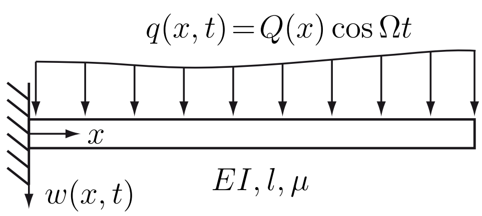
In dem skizzierten Stab (E-Modul E, Flächenträgheitsmoment I, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Querschnittsfläche A, Länge l) läuft die Welle der gegebenen Funktion $u(x,t)$ auf das linke eingespannte Ende zu. Kreuzen Sie an!



	richtig	falsch
Die Eigenkreisfrequenzen des Systems hängen von der Form der Welle $u(x,t)$ ab. 1	☐	☒
Am linken Ende nimmt bei der Wellenreflektion die mechanische Energie des Systems ab. 1	☐	☒
Die erste Eigenkreisfrequenz ist $4\pi\frac{l}{c}$. 1	☐	☒

Aufgabe T5 [2 Punkte]

Gegeben sei skizzierter Biegebalken (EI, l, μ) der an der linken Seite fest eingespannt ist. Belastet wird das System durch eine Streckenlast $q(x,t) = Q(x)\cos\Omega t$. Geben Sie die Randbedingungen sowie einen Ansatz für die partikuläre Lösung an.



Gegeben: EI, l, μ, $Q(x)$, Ω

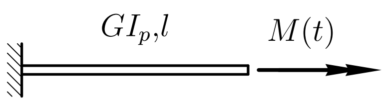
Randbedingungen: $w(0,t) = 0$ $\quad w'(0,t) = 0$

$EIw''(l,t) = 0$ $\quad EIw'''(l,t) = 0$

Ansatz: $w_p(x,t) = W(x)\cos\Omega t$ 2

Aufgabe T6 [1 Punkt]

Welchen Einfluss hat ein zeitabhängiges äußeres Moment $M(t)$ auf die Eigenfrequenzen der Torsionsschwingungen des skizzierten Systems? Kreuzen Sie an.

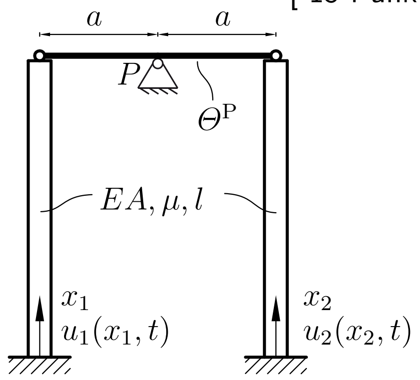


Die Eigenfrequenzen werden durch das Moment	kleiner	nicht verändert	größer	
	☐	☒	☐	1

Aufgabe 1

[15 Punkte]

Das skizzierte System besteht aus zwei homogenen Dehnstäben (Dehnsteifigkeit EA, Massenbelegung μ, Länge l) die über eine **starre** Stange (Massenträgheitsmoment Θ^{P}, Masse vernachlässigbar, in Punkt P gelagert) verbunden sind.



Gegeben: EA, μ, a, l, Θ^{P}

a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen) für die beiden Dehnstäbe in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

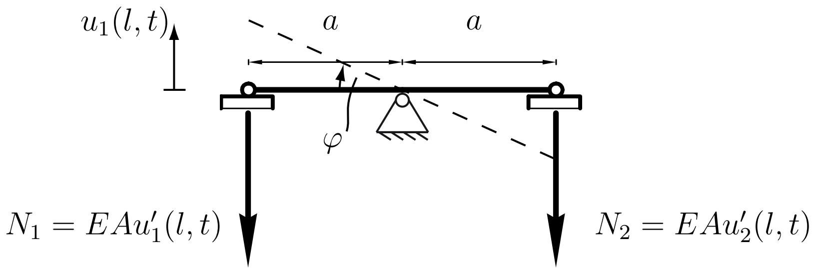
Bewegungsgleichungen:

Dehnstab 1: $\mu\ddot{u}_1(x_1,t) - EAu_1''(x_1,t) = 0$ 1

Dehnstab 2: $\mu\ddot{u}_2(x_2,t) - EAu_2''(x_2,t) = 0$ 1

b) Geben Sie alle Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an. (Hinweis: Zeichnen Sie ggf. ein Freikörperbild.)

Nebenrechnung, ggf. Freikörperbild:



$$\Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{u}_1(l,t)}{a}$$ 1

Rand- und Übergangsbedingungen:

$u_1(0,t) = 0$ 1 $\qquad u_2(0,t) = 0$ 1

$$-EAu_1'(l,t)a + EAu_2'(l,t)a = \frac{\ddot{u}_1(l,t)}{a}\Theta^{\mathrm{P}}$$ 2

$u_1(l,t) = -u_2(l,t)$ 1

c) Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 soll mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten abgeschätzt werden. Welche Bedingungen müssen die Ansatzfunktionen $U_1(x_1)$ und $U_2(x_2)$ erfüllen?

Bedingungen für $U_1(x_1)$ und $U_2(x_2)$:

$U_1(0) = 0 \qquad U_2(0) = 0 \qquad U_1(l) = -U_2(l)$ 1

d) Wie lautet der Rayleigh-Quotient $R[U_1(x_1), U_2(x_2)]$ des Systems? Drücken Sie das Ergebnis nur in den gegebenen Größen sowie $U_1(x_1)$, $U_2(x_2)$ und deren Ableitungen aus.

Nebenrechnung:

$$T[\dot{u}_1(x_1,t), \dot{u}_2(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{u}_1^2(x_1,t)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{u}_2^2(x_2,t)\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{u}_1(l,t)}{a}\right)^2 \Theta^{\mathrm{P}} \quad 2$$

$$U[u_1(x_1,t), u_2(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^l EA u_1'^2(x_1,t)\mathrm{d}x_1 + \frac{1}{2}\int_0^l EA u_2'^2(x_2,t)\mathrm{d}x_2 \quad 2$$

$$R[U_1(x_1), U_2(x_2)] = \frac{U[U_1(x_1), U_2(x_2)]}{T[U_1(x_1), U_2(x_2)]}$$

$$R[U_1(x_1), U_2(x_2)] = \frac{\int_0^l EA U_1'^2(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_0^l EA U_2'^2(x_2)\mathrm{d}x_2}{\int_0^l \mu U_1^2(x_1)\mathrm{d}x_1 + \int_0^l \mu U_2^2(x_2)\mathrm{d}x_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{U_1(l)}{a}\right)^2 \Theta^{\mathrm{P}}} \quad 1$$

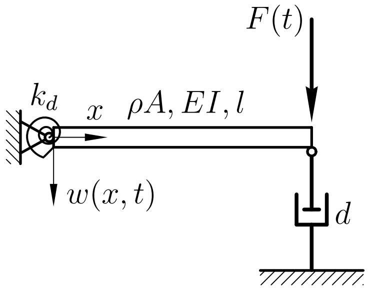
e) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) bezüglich der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an. 1

- [X] Bei zunehmendem Massenträgheitsmoment Θ^{P} sinkt die erste Eigenkreisfrequenz.
- [ ] Bei zunehmendem Massenträgheitsmoment Θ^{P} steigt die erste Eigenkreisfrequenz.
- [ ] Das Massenträgheitsmoment Θ^{P} hat keinen Einfluss auf die erste Eigenkreisfrequenz.

Aufgabe 2

[9 Punkte]

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (ρA, EI, l) ist links gelagert und rechts über einen Dämpfer (Dämpfungskonstante d) abgestützt. Am linken Lager ist zusätzlich eine Drehfeder (Federsteifigkeit k_d) angebracht. Am rechten Ende des Balkens wirkt die Kraft $F(t)$. Die Feder ist für die skizzierte Lage entspannt.



Gegeben: ρA, EI, l, k_d, d, $F(t)$

a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \dot{w}^2(x,t)\mathrm{d}x \quad 1$$

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

Nebenrechnung:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI w''^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}k_d w'^2(0,t) \quad 1$$

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW der nicht in U berücksichtigten Kräfte an.

Nebenrechnung:

$$\delta W = F(t)\delta w(l,t) - d\dot{w}(l,t)\delta w(l,t) \quad 1$$

d) Geben Sie alle geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \quad 1$$

e) Nach Ausführen der Variation und partieller Integration liefert das Prinzip von Hamilton für das gegebene System den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^l\Big(-\rho A\ddot{w}(x,t)-EIw^{\mathrm{IV}}(x,t)\Big)\delta w(x,t)\,\mathrm{d}x+\Big(F(t)-d\dot{w}(l,t)\Big)\delta w(l,t)\right.$$
$$\left.-\,k_d w'(0,t)\delta w'(0,t)+\Big[EIw'''(x,t)\delta w(x,t)-EIw''(x,t)\delta w'(x,t)\Big]_0^l\right\}\mathrm{d}t$$
$$+\left[\int_0^l\rho A\dot{w}(x,t)\delta w(x,t)\mathrm{d}x\right]_{t_1}^{t_2}=0.$$

Geben Sie damit die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) des Systems und die natürlichen (dynamischen) Randbedingungen an.

Bewegungsgleichung:

$\rho A\ddot{w}(x,t)+EIw^{\mathrm{IV}}(x,t)=0$ 1

natürliche Randbedingungen:

$$F(t)-d\dot{w}(l,t)+EIw'''(l,t)=0$$
$$EIw''(0,t)-k_d w'(0,t)=0$$
$$EIw''(l,t)=0$$

3

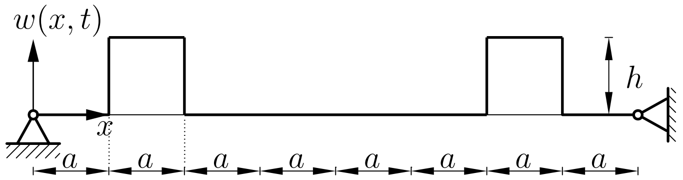
f) Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- [ ] Reibungskräfte können entweder über ihr Potential oder ihre virtuelle Arbeit berücksichtigt werden.
- [ ] Das Prinzip von Hamilton ist nicht anwendbar wenn verteilte, zeitabhängige Lasten auftreten.
- [x] Das Prinzip von Hamilton liefert bei Vorgabe der natürlichen Randbedingungen die Feldgleichung und die geometrischen Randbedingungen. 1

Aufgabe 3

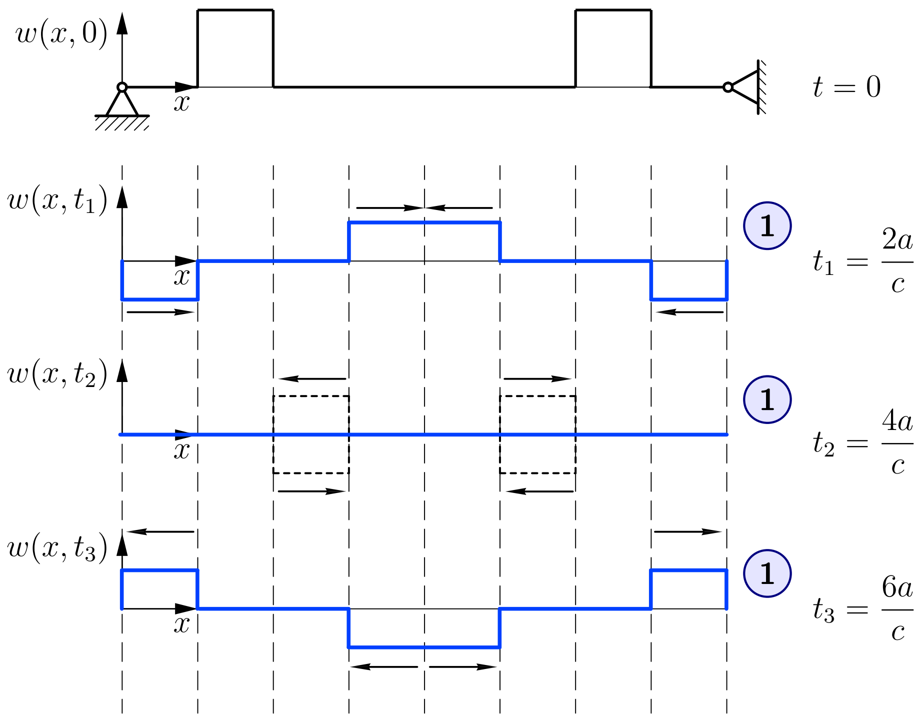
[6 Punkte]

Die fest- fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $8a$) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a, h

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1 = 2a/c$, $t_2 = 4a/c$, $t_3 = 6a/c$ einzeichnen. Kennzeichnen Sie die Richtung der jeweiligen Wellenausbreitung.



b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

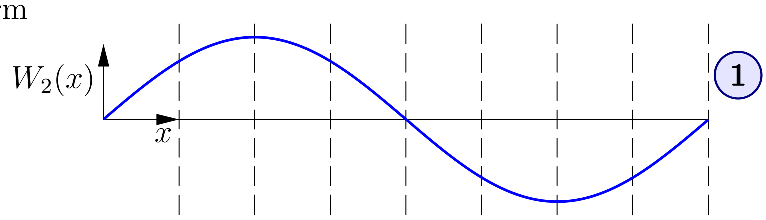
$$T = \frac{16a}{c}$$ 1

c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{8a}$$ 1

d) Skizzieren Sie die zweite Eigenform $W_2(x)$ der Saite.

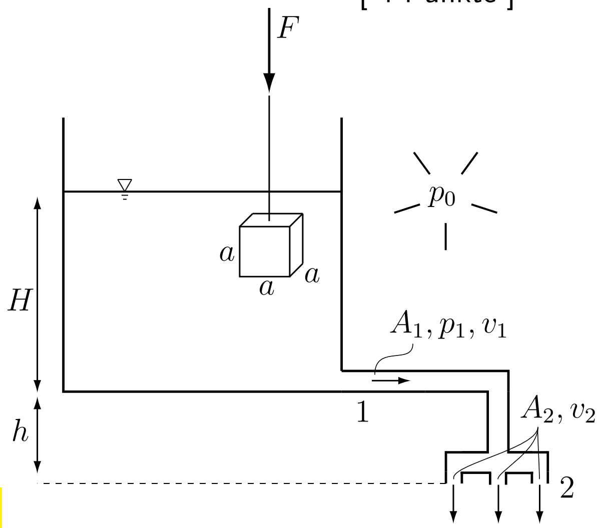
zweite Eigenform



Aufgabe 4

[4 Punkte]

Eine Flüssigkeit unbekannter Dichte befindet sich in einem Behälter. Der Füllstand H kann als konstant angenommen werden. Ein Würfel der Kantenlänge a wird mit der Kaft F vollständig unter der Oberfläche gehalten. Aus einem Rohr des Querschnittes A_1 fließt die Flüssigkeit durch einen Dreifach-Ausfluss (jeweils Querschnittsfläche A_2, Austrittsgeschwindigkeit v_2) in die Umgebung. An der Stelle 1 habe die Flüssigkeit den bekannten Druck p_1.



Gegeben: F, H, h, a, p_1, v_2, g, p_0

Ergänzung gegenüber ursprünglicher Aufgabenstellung: Gewichtskraft des Würfels ist zu vernachlässigen.

a) Wie groß ist die Dichte ρ der Flüssigkeit in Abhängigkeit der gegeben Größen?

Nebenrechung:

$$F = \rho a^3 g$$

$$\rho = \frac{F}{a^3 g} \quad 1$$

b) Berechnen Sie nun für gegebene Geschwindgkeit v_2 das nötige Querschnittsverhältnis $\frac{A_1}{A_2}$. **Nehmen Sie die Dichte ρ jetzt als gegeben an.**

Nebenrechnung:

$$A_1 v_1 = 3 A_2 v_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = 3\frac{v_2}{v_1} \quad 1$$

$$\frac{1}{2}v_1^2\rho + p_1 + \rho g h = \frac{1}{2}v_2^2\rho + p_0 \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_0 - p_1 - \rho g h + \frac{1}{2}v_2^2\rho\right)}$$

Querschnittsverhältnis:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3v_2}{\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_0 - p_1 - \rho g h + \frac{1}{2}v_2^2\rho\right)}} \quad 1$$

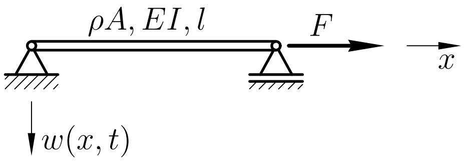
Andere richtige Lösungen durch verschiedene Bezugspunkte und Lage des Nullniveaus möglich.

Aufgabe 5

[6 Punkte]

Der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (ρA, EI, l) ist **mit der konstanten positiven Kraft** F **vorgespannt**.

Gegeben: ρA, EI, l, F



a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \rho A \dot{w}^2(x,t)\mathrm{d}x$$ 1

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an. Berücksichtigen Sie auch F in der potentiellen Energie.

Nebenrechnung:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EI w''^2(x,t)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^l F w'^2(x,t)\mathrm{d}x$$ 1

c) Welche der folgenden Funktionen können als Ansatzfunktionen zur Abschätzung der ersten Eigenkreisfrequenz des Systems mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten verwendet werden? Kreuzen Sie an.

☐ $W_1(x) = x(x+l)$ ☒ $W_2(x) = \sin\pi\frac{x}{l}$ ☐ $W_3(x) = \sinh\frac{x}{l}$ 1

d) Gegeben sind nun die Ansatzfunktionen $W_\mathrm{A}(x)=x(x-l)$ und $W_\mathrm{B}(x)=x^2(x-l)$. Berechnen Sie, welche der beiden Ansatzfunktionen die beste Abschätzung für die erste Eigenkreisfrequenz des Systems liefert.

Gegeben:

$$W_\mathrm{A}(x) = x(x-l), \qquad W_\mathrm{B}(x) = x^2(x-l)$$

Nebenrechnung:

$$\omega_{1,i}^2 \leq \frac{U[W_i(x)]}{T[W_i(x)]}$$

$$\omega_{1,\mathrm{A}}^2 \leq \frac{10(12EI + Fl^2)}{\rho A l^4} \quad 1$$

$$\omega_{1,\mathrm{B}}^2 \leq \frac{14(30EI + Fl^2)}{\rho A l^4} \quad 1$$

$\Rightarrow \omega_{1,\mathrm{A}}^2$ ist die bessere Abschätzung

Die beste Abschätzung liefert: $W_A(x)$ 1

MMD Mechatronische Maschinendynamik Dr.-Ing. Daniel Hochlenert	**Kontinuumsmechanik** Sommersemester 2011

Probeklausur vom 15.07.2011

____
Name, Vorname

____
Matrikelnummer

____
Studiengang

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte	10	16	10	9	5	50
erreichte Punkte						
Handzeichen						

Theorieaufgaben [10 Punkte]

Aufgabe T1 [2 Punkte]

Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die Gestalt

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{\pi(x-ct)}{2l}\right) + \sin\left(\frac{\pi(x+ct)}{2l}\right)\right].$$

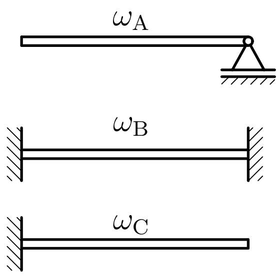
Wie lauten die dazugehörigen Anfangsbedingungen?

$w_0(x) =$ ________________

$\dot{w}_0(x) =$ ________________

Aufgabe T2 [2 Punkte]

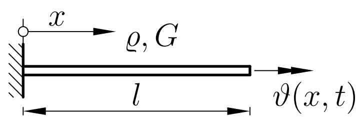
Die drei skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich nur in der Art ihrer Lagerung. Die jeweils erste Eigenkreisfrequenz der Systeme ist $\omega_{\mathrm{A,B,C}}$. Ordnen Sie die Frequenzen der Größe nach.



______ $<$ ______ $<$ ______

Aufgabe T3 [1 Punkt]

Wie lautet die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit für den skizzierten <u>Torsionsstab</u> (Länge l, Dichte ϱ, Schubmodul G) ?



$c =$ ____________

Aufgabe T4 [2 Punkte]

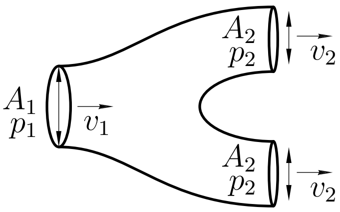
Für einen Biegebalken sei $W_2(x)$ die Funktion der zweiten Eigenform. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- ☐ Der Rayleigh-Quotient $R[W_2(x)]$ ist gleich dem Quadrat der ersten Eigenkreisfrequenz.
- ☐ Der Rayleigh-Quotient $R[W_2(x)]$ ist unabhängig von der Biegesteifigkeit EI des Balkens.
- ☐ Der Rayleigh-Quotient $R[W_2(x)]$ ist größer als das Quadrat der ersten Eigenkreisfrequenz.

Aufgabe T5

[2 Punkte]

Eine ideale Flüssigkeit (Dichte ϱ) strömt durch das skizzierte sich verzweigende Rohr. Wie groß muß die Geschwindigkeit v_1 und das Verhältinis der Querschnittsflächen $\frac{A_2}{A_1}$ sein, damit sich am Eingang der Druck p_1 und an den Ausgängen jeweils der Druck p_2 und die Austrittsgeschwindigkeit v_2 einstellt? .



Gegeben: v_2, p_1, p_2, ρ

Nebenrechnung:

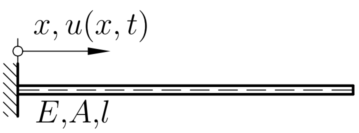
$v_1 =$ ____________________

$\frac{A_2}{A_1} =$ ____________________

Aufgabe T6

[1 Punkt]

Gegeben sei skizzierter Stab (E-Modul E, Querschnittsfläche A, Länge l) der nur Längschwingungen durchführen kann.
Nennen Sie alle dynamischen Randbedingungen.

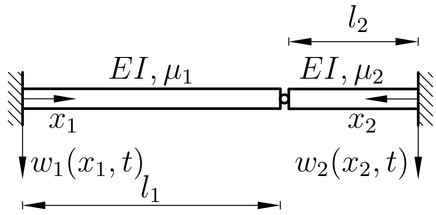


Aufgabe 1

[16 Punkte]

Das skizzierte System besteht aus zwei homogenen Balken (Biegesteifigkeit EI, Massenbelegung μ_1 bzw. μ_2, Länge l_1 bzw. l_2, schlank und dehnstarr), die über ein Gelenk verbunden sind.

Gegeben: EI, μ_1, μ_2, l_1, l_2



a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen) für die beiden Balken in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

Bewegungsgleichungen:

linker Balken: ______________________

rechter Balken: ______________________

b) Geben Sie alle Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an. (Hinweis: Zeichnen Sie ggf. ein Freikörperbild.)

Nebenrechnung, ggf. Freikörperbild:

Rand- und Übergangsbedingungen:

c) Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 soll mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten abgeschätzt werden. Welche Bedingungen müssen die Ansatzfunktionen $W_1(x_1)$ und $W_2(x_2)$ erfüllen?

Bedingungen für $W_1(x_1)$ und $W_2(x_2)$:

d) Wie lautet der Rayleigh-Quotient $R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$ des Systems? Drücken Sie das Ergebnis nur in den gegebenen Größen sowie $W_1(x_1)$ und $W_2(x_2)$ aus.

Nebenrechnung:

$R[W_1(x_1), W_2(x_2)] =$

e) Tragen Sie das richtige Vergleichssymbol ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$) bezüglich des Rayleigh-Quotienten $R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$ und der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 ein, wenn

- $W_1(x_1)$, und $W_2(x_2)$ die unter c) gefragten Bedingungen erfüllen:

  ω_1^2 ____ $R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$

- $W_1(x_1)$, und $W_2(x_2)$ die ersten Eigenformen des jeweiligen Systems sind:

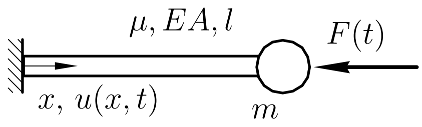
  ω_1^2 ____ $R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$

Aufgabe 2

[10 Punkte]

Der skizzierte Stab (μ, EA, l) ist links fest eingespannt und kann nur Längsschwingungen ausführen. Am rechten Ende ist eine Einzelmasse m besfestigt. Ausserdem greift eine Einzellast $F(t)$ an.

Gegeben: μ, EA, l, m, $F(t)$



a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$T =$

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

Nebenrechnung:

$U =$

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW der nicht in U berücksichtigten Kräfte an. Gibt es potentiallose Kräfte in diesem System?

Nebenrechnung:

$\delta W =$ ______

Gibt es potentiallose Kräfte? Ja ☐ Nein ☐

d) Geben Sie alle geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

e) Nach Ausführen der Variation und partieller Integration liefert das Prinzip von Hamilton für das gegebene System den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \Big(-\mu \ddot{u}(x,t) + EAu''(x,t) \Big) \delta u(x,t) \; \mathrm{d}x + \Big(-F(t) - m\ddot{u}(l,t) \Big) \delta u(l,t) \right.$$
$$\left. - \Big[EAu'(x,t)\delta u(x,t) \Big]_0^l \right\} \mathrm{d}t + \left[\int_0^l \mu \dot{u}(x,t) \delta u(x,t) \mathrm{d}x + m\dot{u}(x,t)\delta u(l,t) \right]_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Geben Sie damit die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) des Systems und alle natürlichen (dynamischen) Randbedingungen an.

Bewegungsgleichung:
natürliche Randbedingung(en):

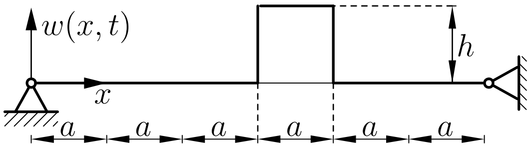
f) Es sei nun $F(t) = \hat{F} \cos \Omega t$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- ☐ Ein Ansatz der Form $u_p(x,t) = U(x) \sin \Omega t$ würde auf die partikuläre Lösung führen.
- ☐ Ein Ansatz der Form $u_p(x,t) = U(x) \cos \Omega t$ würde auf die partikuläre Lösung führen.
- ☐ Das Prinzip von Hamilton liefert nur für harmonische Funktionen $F(t)$ die korrekte Feldgleichung.

Aufgabe 3

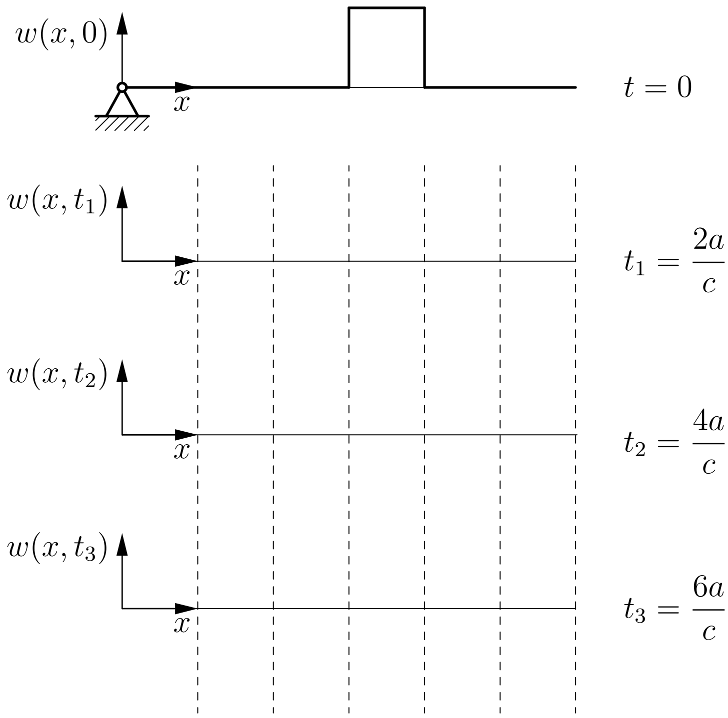
[9 Punkte]

Die fest-fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $6a$) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1=2a/c$, $t_2=4a/c$, $t_3=6a/c$ einzeichnen. Kennzeichnen Sie die Laufrichtung der Wellen.

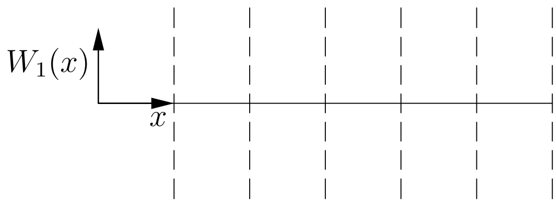


b) Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem die Auslenkung der Saite komplett Null ist? Wenn ja, geben Sie den Zeitpunkt t^* an.

nein ☐ ja ☐ $t^* =$ ______

c) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.

1. Eigenform



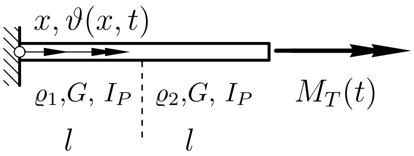
d) Hängt die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c von der Vorspannung der Saite ab?

ja ☐ nein ☐

Aufgabe 4

[5 Punkte]

Der skizzierte Torsionsstab wechselnder Dichte (ϱ_1, ϱ_2, G, $2l$, I_p) wird am rechten Ende durch ein Moment $M(t)$ zu Schwingungen angeregt.



Gegeben: ϱ_1, ϱ_2, G, I_p, l, $M(t)$

a) Geben Sie die Bewegungsgleichung(en) für den Torsionsstab in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

Bewegungsgleichung(en):

b) Geben Sie alle Randbedingungen an.

Nebenrechnung, Skizze:

Randbedingungen:

c) Das Moment $M_T(t) = \hat{M}_T \cos \Omega t$ sei nun harmonisch (Ω gegeben). Machen Sie jeweils einen Ansatz zur Berechnung der eingeschwungenen Bewegung $\vartheta_{\mathrm{P}}(x,t)$ und der freien Schwingung $\vartheta_{\mathrm{h}}(x,t)$.

$\vartheta_{\mathrm{P}}(x,t) =$

$\vartheta_{\mathrm{h}}(x,t) =$

Probeklausur vom 15.07.2011

Name, Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte	10	16	10	9	5	50
erreichte Punkte						
Handzeichen						

Theorieaufgaben [10 Punkte]

Aufgabe T1 [2 Punkte]

Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die Gestalt

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{\pi(x-ct)}{2l}\right) + \sin\left(\frac{\pi(x+ct)}{2l}\right)\right].$$

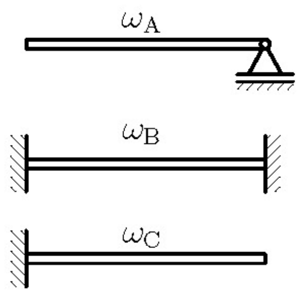
Wie lauten die dazugehörigen Anfangsbedingungen?

$w_0(x) =$ $\hat{w}\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$

$\dot{w}_0(x) =$ 0

Aufgabe T2 [2 Punkte]

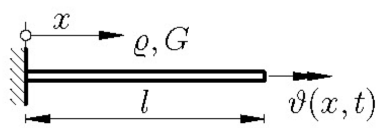
Die drei skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich nur in der Art ihrer Lagerung. Die jeweils erste Eigenkreisfrequenz der Systeme ist $\omega_{\mathrm{A,B,C}}$. Ordnen Sie die Frequenzen der Größe nach.



ω_A < ω_C < ω_B

Aufgabe T3 [1 Punkt]

Wie lautet die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit für den skizzierten Torsionsstab (Länge l, Dichte ϱ, Schubmodul G) ?



$c =$ $\sqrt{\frac{G}{\varrho}}$

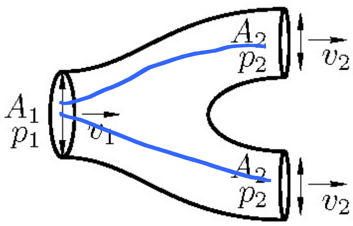
Aufgabe T4 [2 Punkte]

Für einen Biegebalken sei $W_2(x)$ die Funktion der zweiten Eigenform. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- [ ] Der Rayleigh-Quotient $R[W_2(x)]$ ist gleich dem Quadrat der ersten Eigenkreisfrequenz.
- [ ] Der Rayleigh-Quotient $R[W_2(x)]$ ist unabhängig von der Biegesteifigkeit EI des Balkens.
- [x] Der Rayleigh-Quotient $R[W_2(x)]$ ist größer als das Quadrat der ersten Eigenkreisfrequenz.

Aufgabe T5 [2 Punkte]

Eine ideale Flüssigkeit (Dichte ϱ) strömt durch das skizzierte sich verzweigende Rohr. Wie groß muß die Geschwindigkeit v_1 und das Verhältinis der Querschnittsflächen $\frac{A_2}{A_1}$ sein, damit sich am Eingang der Druck p_1 und an den Ausgängen jeweils der Druck p_2 und die Austrittsgeschwindigkeit v_2 einstellt? .



Gegeben: v_2, p_1, p_2, ρ

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

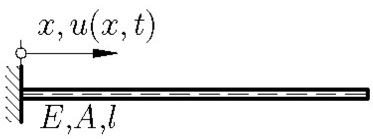
$$v_1 A_1 = 2 A_2 v_2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 - p_1\right)}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{v_1}{2 v_2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(\frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 - p_1\right)}}{2 v_2}$$

Aufgabe T6 [1 Punkt]

Gegeben sei skizzierter Stab (E-Modul E, Querschnittsfläche A, Länge l) der nur Längsschwingungen durchführen kann.
Nennen Sie alle dynamischen Randbedingungen.



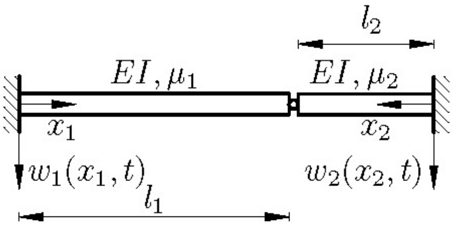
$$EA u'(l,t) = 0$$

Aufgabe 1

[16 Punkte]

Das skizzierte System besteht aus zwei homogenen Balken (Biegesteifigkeit EI, Massenbelegung μ_1 bzw. μ_2, Länge l_1 bzw. l_2, schlank und dehnstarr), die über ein Gelenk verbunden sind.

Gegeben: EI, μ_1, μ_2, l_1, l_2



a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen) für die beiden Balken in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

Bewegungsgleichungen:

linker Balken: $\mu_1 \ddot{w}_1(x_1,t) + EI\, w_1^{IV}(x_1,t) = 0$

rechter Balken: $\mu_2 \ddot{w}_2(x_2,t) + EI\, w_2^{IV}(x_2,t) = 0$

b) Geben Sie alle Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an. (Hinweis: Zeichnen Sie ggf. ein Freikörperbild.)

Nebenrechnung, ggf. Freikörperbild: (8)

$Q_1 = -Q_2$

$Q_1 = -EI\, w_1'''(l_1,t)$

$Q_2 = -EI\, w_2'''(l_2,t)$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$w_1(0,t) = 0$ $\quad$ $w_2(0,t) = 0$

$w_1'(0,t) = 0$ $\quad$ $w_2'(0,t) = 0$

$EI\, w_1''(l_1,t) = 0$ $\quad$ $EI\, w_2''(l_2,t) = 0$

$w_1(l_1,t) = w_2(l_2,t)$

$EI\, w_1'''(l_1 t) + EI\, w_2'''(l_2,t) = 0$

c) Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 soll mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten abgeschätzt werden. Welche Bedingungen müssen die Ansatzfunktionen $W_1(x_1)$ und $W_2(x_2)$ erfüllen?

Bedingungen für $W_1(x_1)$ und $W_2(x_2)$:

$W_1(0) = 0 \quad W_2(0) = 0 \quad W_1'(0) = 0 \quad W_2'(0) = 0$

$W_1(l_1) = W_2(l_2)$

d) Wie lautet der Rayleigh-Quotient $R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$ des Systems? Drücken Sie das Ergebnis nur in den gegebenen Größen sowie $W_1(x_1)$ und $W_2(x_2)$ aus.

Nebenrechnung:

$$T[\dot w_1(x_1,t), \dot w_2(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \mu_1 \dot w_1^2(x_1,t)\,dx_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} \mu_2 \dot w_2^2(x_2,t)\,dx_2$$

$$U[w_1(x_1,t), w_2(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} EI\, w_1''^2(x_1,t)\,dx_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} EI\, w_2''^2(x_2,t)\,dx_2$$

$$R[W_1(x_1), W_2(x_2)] = \frac{U[W_1(x_1), W_2(x_2)]}{T[W_1(x_1), W_2(x_2)]}$$

$$R[W_1(x_1), W_2(x_2)] = \frac{\int_0^{l_1} EI\, W_1''^2(x_1)\,dx_1 + \int_0^{l_2} EI\, W_2''^2(x_2)\,dx_2}{\int_0^{l_1} \mu_1 W_1^2(x_1)\,dx_1 + \int_0^{l_2} \mu_2 W_2^2(x_2)\,dx_2}$$

e) Tragen Sie das richtige Vergleichssymbol ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$) bezüglich des Rayleigh-Quotienten $R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$ und der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 ein, wenn

- $W_1(x_1)$, und $W_2(x_2)$ die unter c) gefragten Bedingungen erfüllen:

  $\omega_1^2 \leq R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$

- $W_1(x_1)$, und $W_2(x_2)$ die ersten Eigenformen des jeweiligen Systems sind:

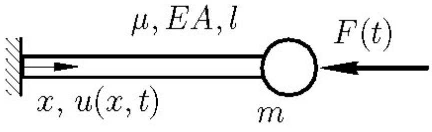
  $\omega_1^2 = R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$

Aufgabe 2

[10 Punkte]

Der skizzierte Stab (μ, EA, l) ist links fest eingespannt und kann nur Längsschwingungen ausführen. Am rechten Ende ist eine Einzelmasse m besfestigt. Ausserdem greift eine Einzellast $F(t)$ an.

Gegeben: μ, EA, l, m, $F(t)$



a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{u}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2} m \dot{u}^2(l,t)$

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

Nebenrechnung:

$U = \frac{1}{2}\int_0^l EA\,u'^2(x,t)\,dx$

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW der nicht in U berücksichtigten Kräfte an. Gibt es potentiallose Kräfte in diesem System?

Nebenrechnung:

$\delta W = - F(t)\,\delta u(l,t)$

Gibt es potentiallose Kräfte? Ja ☐ Nein ☒

d) Geben Sie alle geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

$u(0,t) = 0$

e) Nach Ausführen der Variation und partieller Integration liefert das Prinzip von Hamilton für das gegebene System den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \Big(-\mu\ddot{u}(x,t) + EAu''(x,t) \Big) \delta u(x,t)\, \mathrm{d}x + \Big(-F(t) - m\ddot{u}(l,t) \Big) \delta u(l,t) - \Big[EAu'(x,t)\delta u(x,t) \Big]_{0}^{l} \right\} \mathrm{d}t + \underbrace{\left[\int_0^l \mu\dot{u}(x,t)\delta u(x,t)\mathrm{d}x + m\dot{u}(x,t)\delta u(l,t) \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} = 0.$$

$=0$

Geben Sie damit die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) des Systems und alle natürlichen (dynamischen) Randbedingungen an.

Bewegungsgleichung:

$\mu \ddot{u}(x,t) - EAu''(x,t) = 0$

natürliche Randbedingung(en):

$-F(t) - m\ddot{u}(l,t) - EAu'(l,t) = 0$

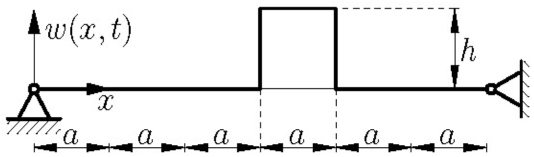
f) Es sei nun $F(t) = \hat{F}\cos\Omega t$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- [ ] Ein Ansatz der Form $u_p(x,t) = U(x)\sin\Omega t$ würde auf die partikuläre Lösung führen.
- [x] Ein Ansatz der Form $u_p(x,t) = U(x)\cos\Omega t$ würde auf die partikuläre Lösung führen.
- [ ] Das Prinzip von Hamilton liefert nur für harmonische Funktionen $F(t)$ die korrekte Feldgleichung.

Aufgabe 3

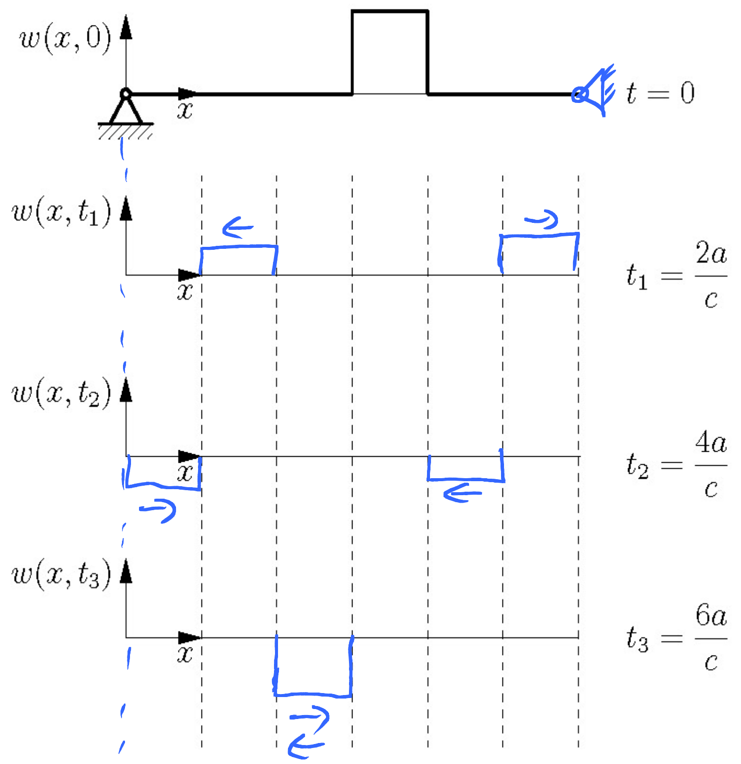
[9 Punkte]

Die fest-fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $6a$) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1=2a/c$, $t_2=4a/c$, $t_3=6a/c$ einzeichnen. Kennzeichnen Sie die Laufrichtung der Wellen.

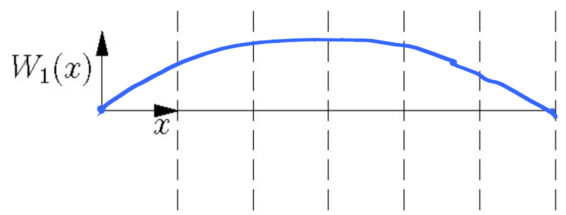


b) Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem die Auslenkung der Saite komplett Null ist? Wenn ja, geben Sie den Zeitpunkt t^* an.

nein ☒ ja ☐ $t^* =$ ____

c) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.

1. Eigenform

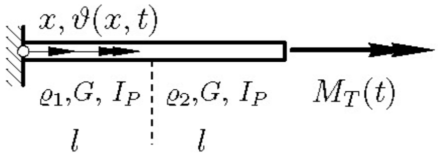


d) Hängt die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c von der Vorspannung der Saite ab?

ja ☒ nein ☐

Aufgabe 4

[5 Punkte]



Der skizzierte Torsionsstab wechselnder Dichte (ϱ_1, ϱ_2, G, $2l$, I_p) wird am rechten Ende durch ein Moment $M(t)$ zu Schwingungen angeregt.

Gegeben: ϱ_1, ϱ_2, G, I_p, l, $M(t)$

a) Geben Sie die Bewegungsgleichung(en) für den Torsionsstab in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

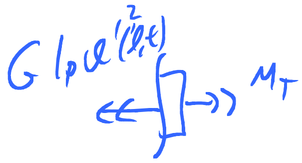
Bewegungsgleichung(en):

$\varrho_1 \ddot{\vartheta}(x,t) - G\vartheta''(x,t) = 0 \quad$ f. $0 \le x \le l$

$\varrho_2 \ddot{\vartheta}(x,t) - G\vartheta''(x,t) = 0 \quad$ f. $l \le x \le 2l$

b) Geben Sie alle Randbedingungen an.

Nebenrechnung, Skizze:



Randbedingungen:

$\vartheta(0,t) = 0 \qquad G I_p \vartheta'(2l,t) = M_T$

c) Das Moment $M_T(t) = \hat{M}_T \cos \Omega t$ sei nun harmonisch (Ω gegeben). Machen Sie jeweils einen Ansatz zur Berechnung der eingeschwungenen Bewegung $\vartheta_{\mathrm{P}}(x,t)$ und der freien Schwingung $\vartheta_{\mathrm{h}}(x,t)$.

$\vartheta_{\mathrm{P}}(x,t) = \Theta_p(x) \cos \Omega t$

$\vartheta_{\mathrm{h}}(x,t) = \Theta_h(x)\, p(t)$

MMD Mechatronische Maschinendynamik Prof. Dr.-Ing. Utz v. Wagner	**Kontinuumsmechanik** Sommersemester 2013

Klausur vom 23.07.2013

Name, Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit.

Unterschrift

Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

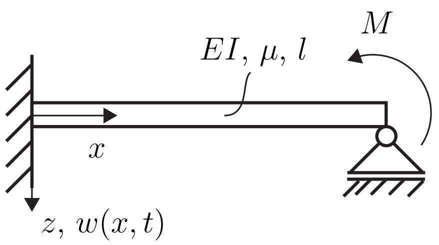
Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte	10	10	10	10	10	50
erreichte Punkte						
Handzeichen						

Theorieaufgaben [10 Punkte]

Aufgabe T1 [2 Punkte]

Geben Sie alle Randbedingungen der skizzierten Systeme an. Unterscheiden Sie dabei zwischen geometrischen und dynamischen Randbedingungen (RB).

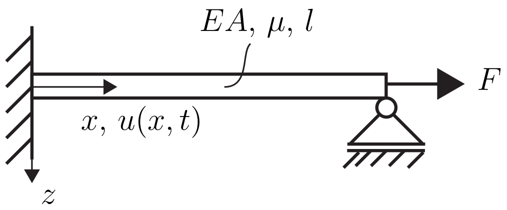
Biegeschwingungen $w(x, t)$



geometrische RB:

dynamische RB:

Längsschwingungen $u(x, t)$



geometrische RB:

dynamische RB:

Aufgabe T2 [1 Punkt]

Die Lösung nach d'Alembert der eindimensionalen Wellengleichung hat die Gestalt

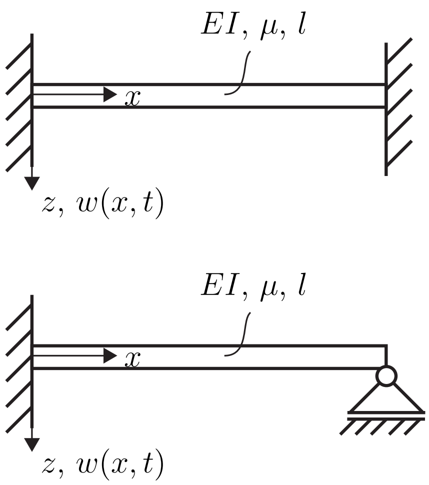
$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

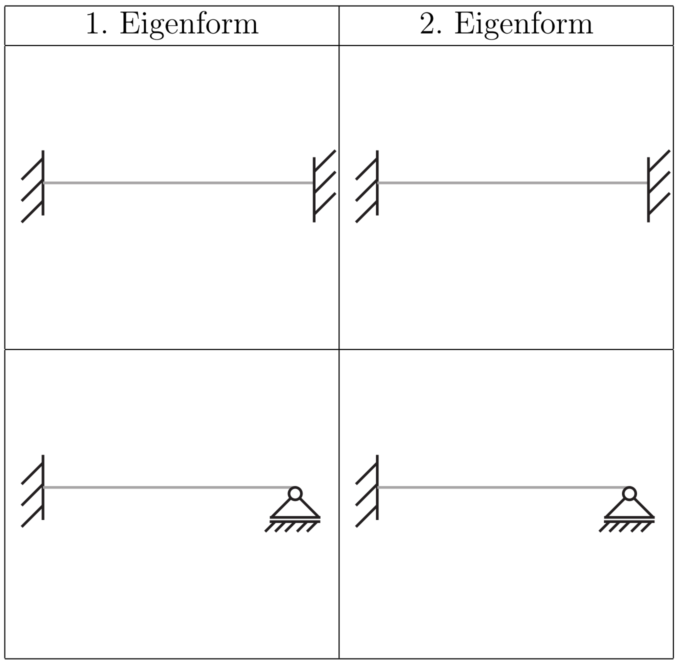
Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in negative x-Richtung laufende Welle? Bitte kreuzen Sie an

☐ f_1	☐ f_2	☐ $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$	☐ $\frac{1}{2}(f_1 - f_2)$

Aufgabe T3 [2 Punkte]

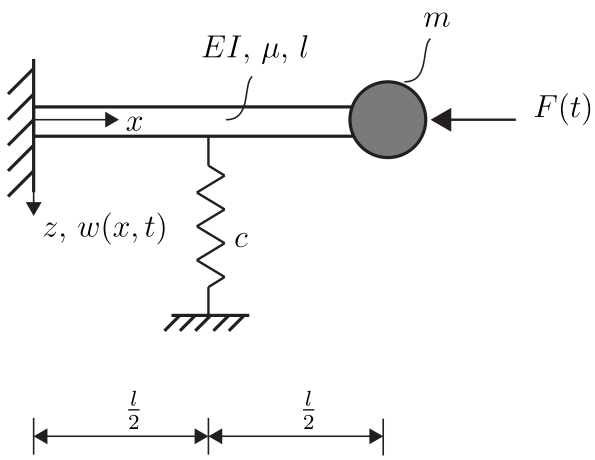
Skizzieren Sie für die beiden Euler-Bernoulli-Balken jeweils die erste und zweite Eigenform.





Aufgabe T4 [2 Punkte]

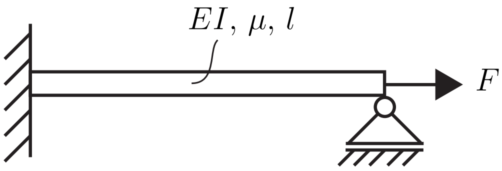
Für das skizzierte System sollen mit Hilfe des Prinzips von Hamilton die Feldgleichung und die dynamischen Randbedingungen für die Biegeschwingungen $w(x,t)$ bestimmt werden. Kreuzen Sie den korrekten Ausdruck für das Prinzip von Hamilton an.



☐	$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m\dot{w}^2(l) - \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = 0$
☐	$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m\dot{w}^2(l) - \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}cw^2(\frac{l}{2})\right)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} F(t)\delta w(l)\mathrm{d}t = 0$
☐	$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m\dot{w}^2(l) - \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}cw^2(\frac{l}{2}) - \frac{1}{2}\int_0^l F(t)w'^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t = 0$
☐	$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{1}{2}\int_0^l \mu\dot{w}^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}m\dot{w}^2(l) - \frac{1}{2}\int_0^l EIw''^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^l F(t)w'^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$ $+\int_{t_0}^{t_1}\left(F(t)\delta w(l) - cw(\frac{l}{2})\delta w(\frac{l}{2})\right)\mathrm{d}t = 0$

Aufgabe T5 [1 Punkt]

Welchen Einfluss hat eine konstante **positive** Vorspannkraft F auf die Eigenkreisfrequenzen der Biegeschwingungen des skizzierten Systems?

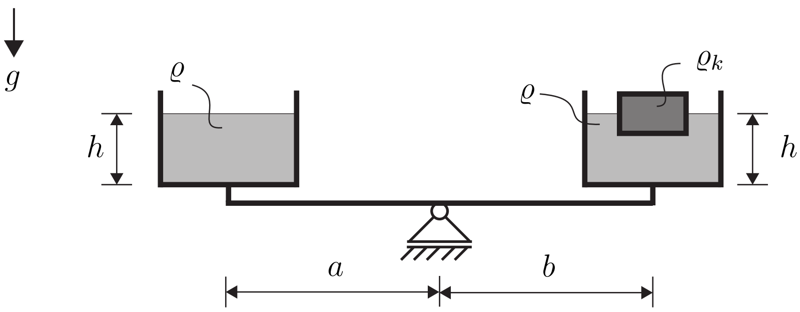


Die Eigenkreisfrequenzen

☐ werden größer.	☐ werden kleiner.	☐ bleiben gleich.

Aufgabe T6 [2 Punkte]

Auf der skizzierten Waage im Gleichgewicht befinden sich die beiden identischen, mit einer Flüssigkeit der Dichte ϱ gefüllten Behälter mit gleichen Füllständen h. Im rechten Behälter schwimmt zudem ein Körper mit Dichte ϱ_K. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.



a) Für die Dichten ϱ, ϱ_K gilt:

☐ $\varrho > \varrho_K$	☐ $\varrho < \varrho_K$

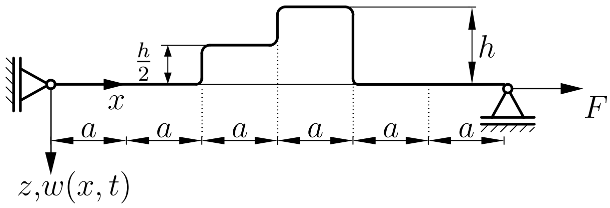
b) Für die Hebelarme a, b gilt:

☐ $a = b$	☐ $a > b$	☐ $a < b$

Aufgabe 1

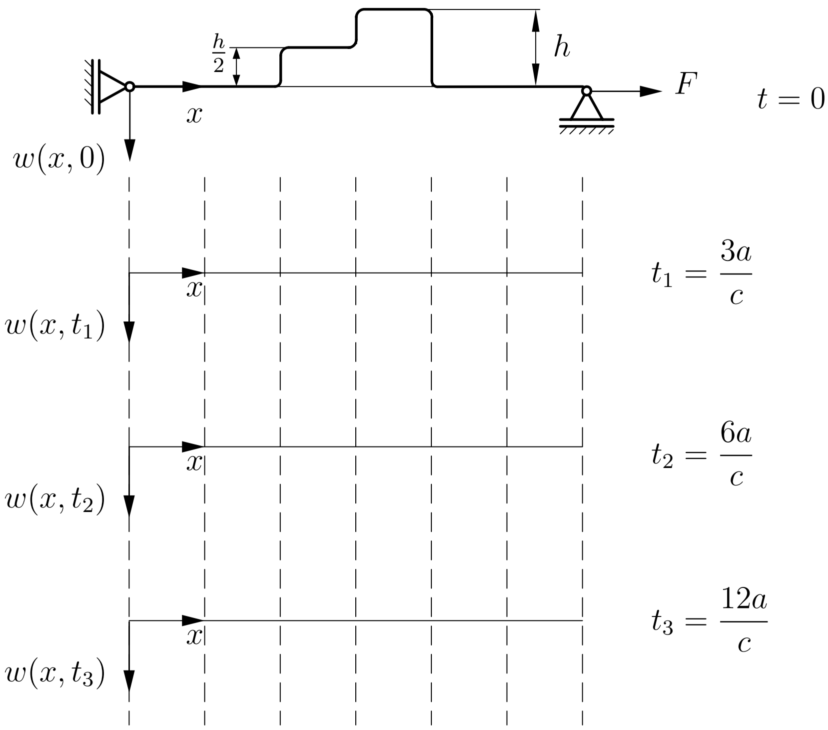
[10 Punkte]

Die vorgespannte, frei-fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $6a$, Vorspannkraft F) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a, h, F

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1=3a/c$, $t_2=6a/c$, $t_3=12a/c$ einzeichnen.



b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

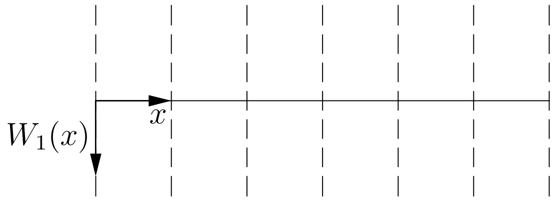
$T =$

c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

$\omega_1 =$

d) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.

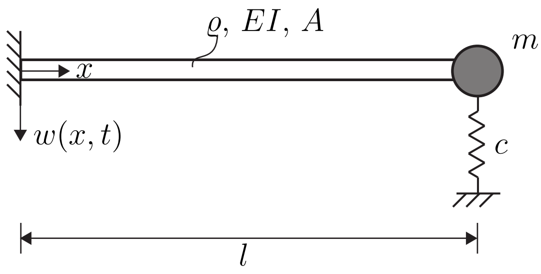
1. Eigenform



Aufgabe 2

[10 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (Dichte ϱ, Biegesteifigkeit EI, Länge l, Querschnittsfläche A) mit einer diskreten Punktmasse (Masse m), die sich über eine Feder (Federsteifigkeit c, entspannt für $w(l,t) = 0$) abstützt.



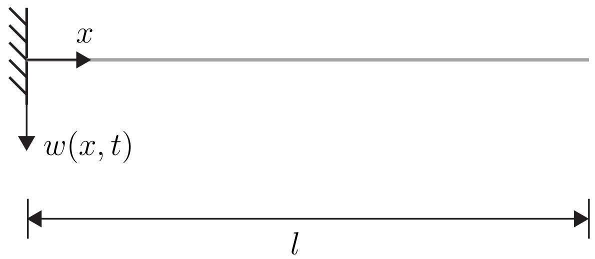
Gegeben: ϱ, A, EI, l, m, c

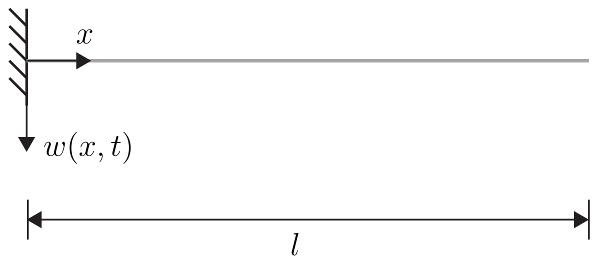
a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

Feldgleichung:

Randbedingungen:

b) Skizzieren Sie die zwei Schwingungsformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen.





c) Welche der folgenden Ansatzfunktionen ist für die Bestimmung der niedrigsten Eigenkreisfrequenz mithilfe des Rayleigh-Quotienten geeignet?

- ☐ $W(x) = x$
- ☐ $W(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{l^2}$
- ☐ $W(x) = A\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right)$
- ☐ $W(x) = A\sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)$

d) Bestimmen Sie mit der Funktion $W(x) = 5\frac{x^2}{l}$ mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten eine obere Schranke für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Spezialfall $\boldsymbol{m = 0}$, $\boldsymbol{c = 0}$.

Nebenrechnung:

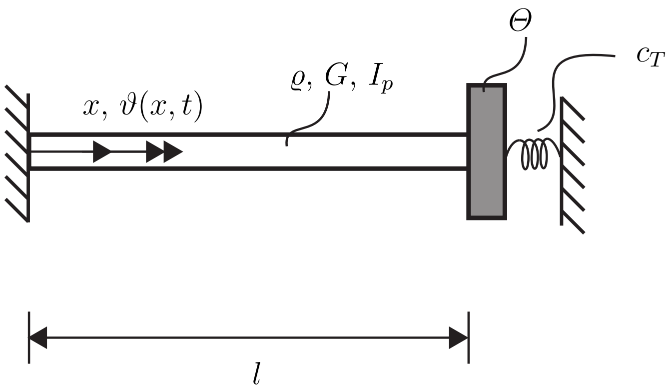
$\omega_1 \leq$

Aufgabe 3

[10 Punkte]

An einem Torsionsstab (Dichte ϱ, Schubmodul G, polares Flächenträgheitsmoment I_p) ist eine starre Scheibe (Massenträgheitsmoment bzgl. x-Achse Θ) angebracht. Die Scheibe ist über eine für $\vartheta(l,t) = 0$ entspannte Torsionsfeder (Drehfedersteifigkeit c_T) mit der Umgebung verbunden. Mit dem Prinzip von Hamilton ist das Randwertproblem für die Torsionsschwingung $\vartheta(x,t)$ zu formulieren.

Gegeben: ϱ, G, I_p, l, Θ, c_T



a) Geben Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U und die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente an.

$T =$

$U =$

$\delta W =$

b) Geben Sie die geometrische(n) Randbedingung(en) für $\vartheta(x,t)$ an.

c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung für $\vartheta(x,t)$ sowie die dynamische(n) Randbedingung(en).

Nebenrechnungen:

Hinweis: Bitte das Ergebnis auf der nächsten Seite eintragen.

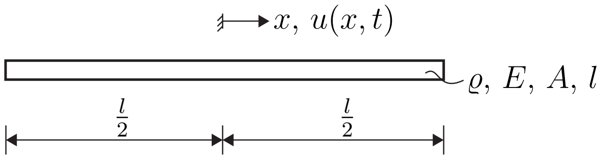
Feldgleichung:

dyn. Randbedingun(en):

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Gegeben ist ein freier Stab (Länge l, Dichte ϱ, E-Modul E, Querschnittsfläche A), der freie Längsschwingungen $u(x,t)$ ausführen kann.



Gegeben: ϱ, E, A, l

Hinweis: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

a) Geben Sie die Feldgleichung für $u(x,t)$ und die Randbedingungen für $x = -\frac{l}{2}$, $x = \frac{l}{2}$ an. Verwenden Sie dabei **ausschließlich das eingezeichnete Koordinatensystem** ($x = 0$ in der Mitte des Stabes).

Feldgleichung:

Randbedingungen:

b) Leiten Sie mit dem Ansatz $u(x,t) = U(x)\sin(\omega t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $U(x)$ her und geben Sie deren allgemeine Lösung an.

Nebenrechnung:

Differentialgleichung:

allgemeine Lösung:

c) Bestimmen Sie die Eigenformen $U_k(x)$ und die Eigenkreisfrequenzen ω_k.

Nebenrechnung:

Eigenformen:

Eigenkreisfrequenzen:

Lösungsvorschlag zur Klausur vom 23.07.2013

Lösungsvorschlag

Theorieaufgaben

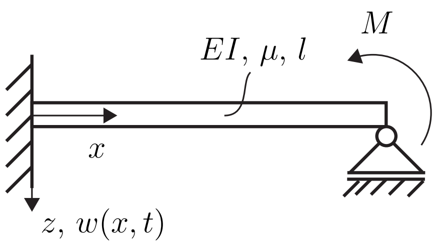
[10 Punkte]

Aufgabe T1

[2 Punkte]

Geben Sie alle Randbedingungen der skizzierten Systeme an. Unterscheiden Sie dabei zwischen geometrischen und dynamischen Randbedingungen (RB).

Biegeschwingungen $w(x,t)$



geometrische RB:

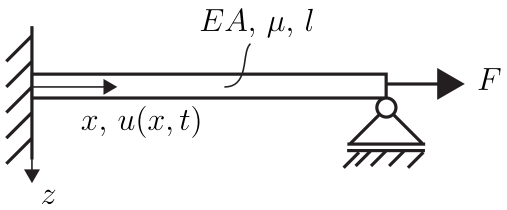
$$w(0,t) = 0$$
$$w'(0,t) = 0$$
$$w(l,t) = 0$$

1

dynamische RB:

$$-EIw''(l,t) = M$$

Längsschwingungen $u(x,t)$



geometrische RB:

$$u(0,t) = 0$$

dynamische RB:

1

$$EAu'(l,t) = F$$

Aufgabe T2 [1 Punkt]

Die Lösung nach d'Alembert der eindimensionalen Wellengleichung hat die Gestalt

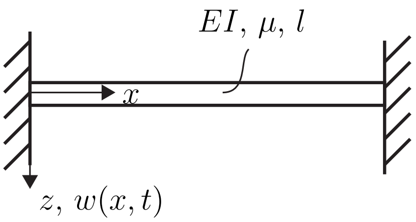
$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct).$$

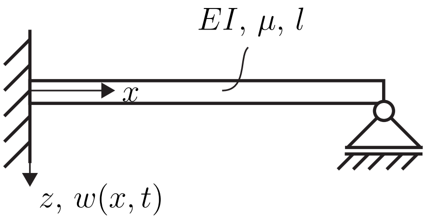
Welcher der folgenden Ausdrücke beschreibt eine in negative x-Richtung laufende Welle? Bitte kreuzen Sie an

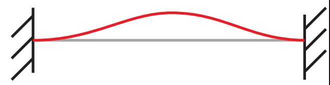
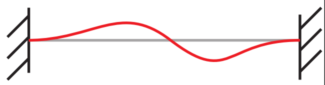
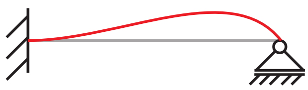
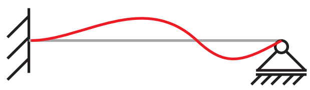
☐ f_1	☒ f_2	☐ $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$	☐ $\frac{1}{2}(f_1 - f_2)$

Aufgabe T3 [2 Punkte]

Skizzieren Sie für die beiden Euler-Bernoulli-Balken jeweils die erste und zweite Eigenform.

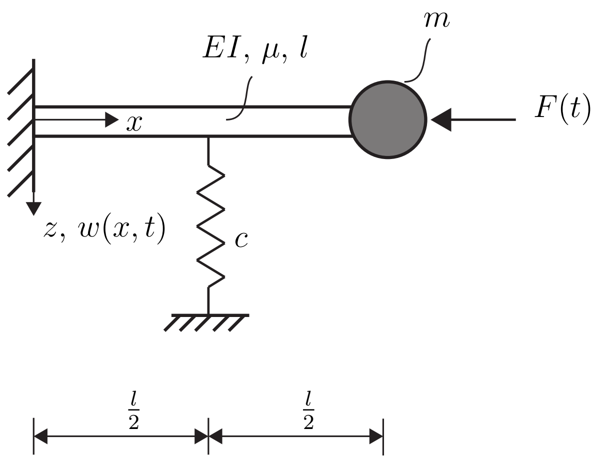




1. Eigenform	2. Eigenform	
		1
		1

Aufgabe T4 [2 Punkte]

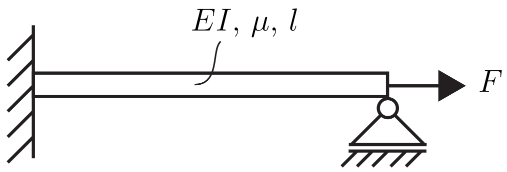
Für das skizzierte System sollen mit Hilfe des Prinzips von Hamilton die Feldgleichung und die dynamischen Randbedingungen für die Biegeschwingungen $w(x,t)$ bestimmt werden. Kreuzen Sie den korrekten Ausdruck für das Prinzip von Hamilton an.



☐	$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int\limits_0^l EI w''^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = 0$
☐	$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int\limits_0^l EI w''^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} c w^2(\tfrac{l}{2}) \right) \mathrm{d}t + \int\limits_{t_0}^{t_1} F(t) \delta w(l) \mathrm{d}t = 0$
☒	$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int\limits_0^l EI w''^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} c w^2(\tfrac{l}{2}) - \frac{1}{2} \int\limits_0^l F(t) w'^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = 0$
☐	$\delta \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(\frac{1}{2} \int\limits_0^l \mu \dot{w}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} m \dot{w}^2(l) - \frac{1}{2} \int\limits_0^l EI w''^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int\limits_0^l F(t) w'^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$ $+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \left(F(t) \delta w(l) - c w(\tfrac{l}{2}) \delta w(\tfrac{l}{2}) \right) \mathrm{d}t = 0$

Aufgabe T5 [1 Punkt]

Welchen Einfluss hat eine konstante **positive** Vorspannkraft F auf die Eigenkreisfrequenzen der Biegeschwingungen des skizzierten Systems?

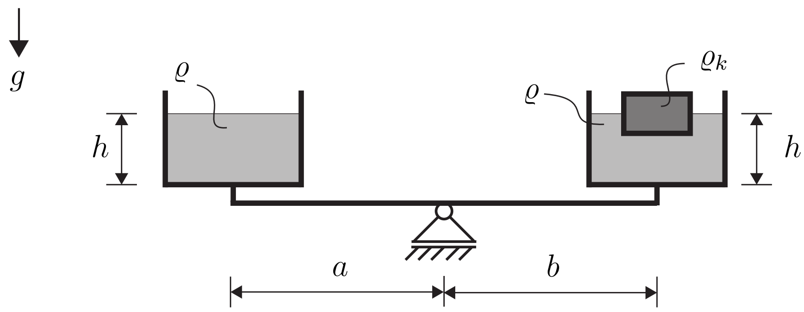


Die Eigenkreisfrequenzen

X werden größer.	☐ werden kleiner.	☐ bleiben gleich.

Aufgabe T6 [2 Punkte]

Auf der skizzierten Waage im Gleichgewicht befinden sich die beiden identischen, mit einer Flüssigkeit der Dichte ϱ gefüllten Behälter mit gleichen Füllständen h. Im rechten Behälter schwimmt zudem ein Körper mit Dichte ϱ_K. Kreuzen Sie die richtigen Aussagen an.



a) Für die Dichten ϱ, ϱ_K gilt:

X $\varrho > \varrho_K$	☐ $\varrho < \varrho_K$

1

b) Für die Hebelarme a, b gilt:

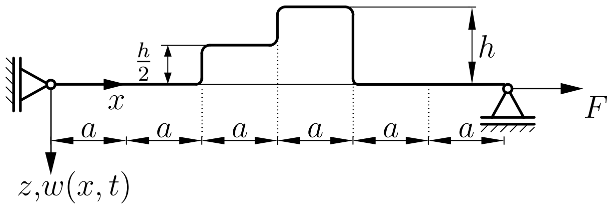
X $a = b$	☐ $a > b$	☐ $a < b$

1

Aufgabe 1

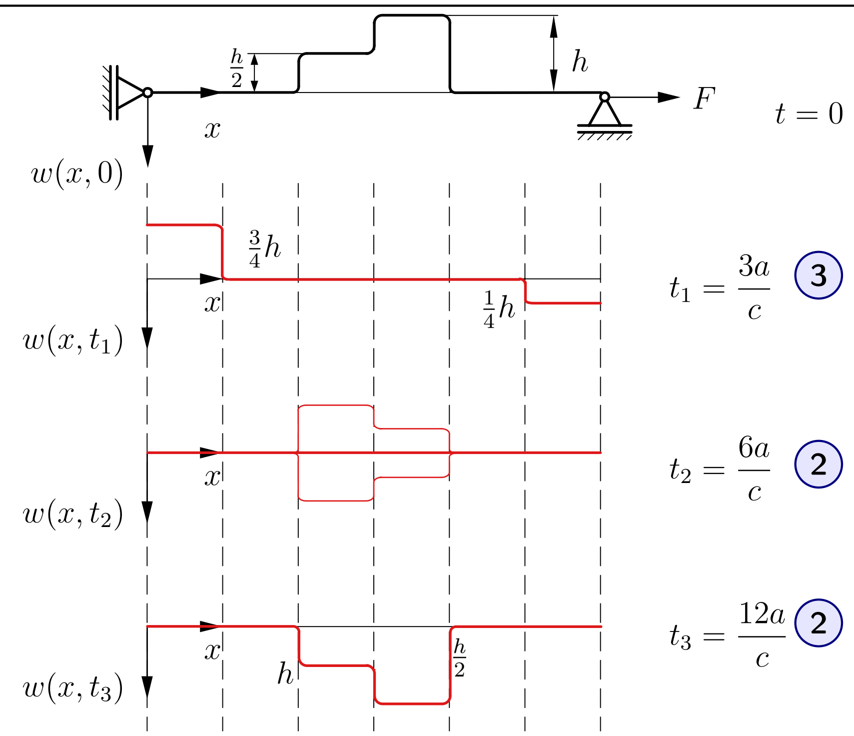
[10 Punkte]

Die vorgespannte, frei-fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $6a$, Vorspannkraft F) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a, h, F

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1=3a/c$, $t_2=6a/c$, $t_3=12a/c$ einzeichnen.



b) Nach welcher Zeit T nimmt die Saite erstmals wieder den Anfangszustand ein?

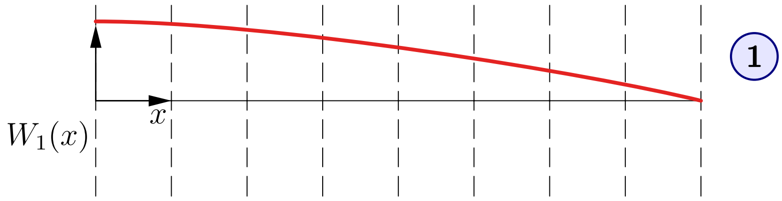
$$T = \frac{24a}{c} \quad 1$$

c) Geben Sie die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 des Systems an.

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi c}{12a} \quad 1$$

d) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.

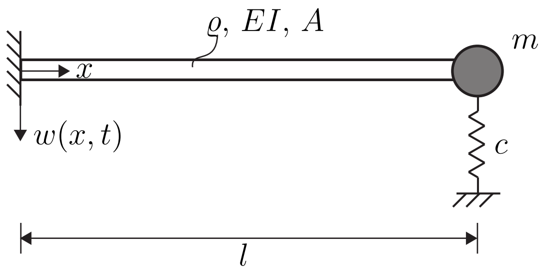
1. Eigenform



Aufgabe 2

[10 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte Euler-Bernoulli-Balken (Dichte ϱ, Biegesteifigkeit EI, Länge l, Querschnittsfläche A) mit einer diskreten Punktmasse (Masse m), die sich über eine Feder (Federsteifigkeit c, entspannt für $w(l,t) = 0$) abstützt.



Gegeben: ϱ, A, EI, l, m, c

a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

Feldgleichung:

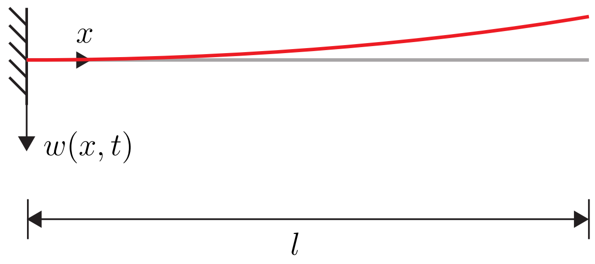
$$\varrho A \ddot{w}(x,t) + EIw^{(4)} = q(x,t) = 0 \quad 1$$

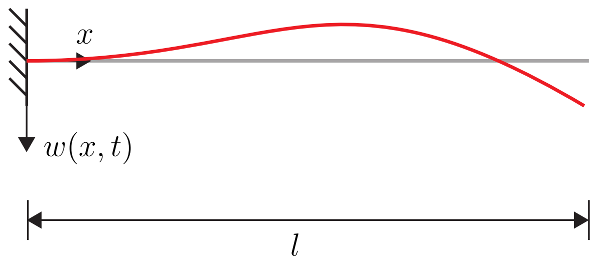
Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} w(0,t) &= 0 \\ w'(0,t) &= 0 \\ w''(l,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad 1$$

$$EIw'''(l,t) = m\ddot{w}(l,t) + cw(l,t) \quad 1$$

b) Skizzieren Sie die zwei Schwingungsformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen.





1

c) Welche der folgenden Ansatzfunktionen ist für die Bestimmung der niedrigsten Eigenkreisfrequenz mithilfe des Rayleigh-Quotienten geeignet?

- [ ] $W(x) = x$
- [x] $W(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{l^2}$ 2
- [ ] $W(x) = A\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right)$
- [ ] $W(x) = A\sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)$

d) Bestimmen Sie mit der Funktion $W(x) = 5\frac{x^2}{l}$ mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten eine obere Schranke für die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Spezialfall $\boldsymbol{m = 0}$, $\boldsymbol{c = 0}$.

Nebenrechnung:

$$\omega_1^2 \leq \frac{\int_0^l EIW''^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l \varrho A W^2(x)\mathrm{d}x}$$

$$\left.\begin{aligned} W''(x) &= 10\frac{1}{l} \\ W''^2(x) &= 100\frac{1}{l^2} \\ W^2(x) &= 25\frac{x^4}{l^2} \end{aligned}\right\} \quad 1$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^l EIW''^2(x)\mathrm{d}x &= 100\frac{1}{l}EI \\ \int_0^l \varrho A W^2(x)\mathrm{d}x &= 5l^3\varrho A \end{aligned}\right\} \quad 1$$

$$\omega_1^2 \leq 20\frac{1}{l^4}\frac{EI}{\varrho A} \quad 1$$

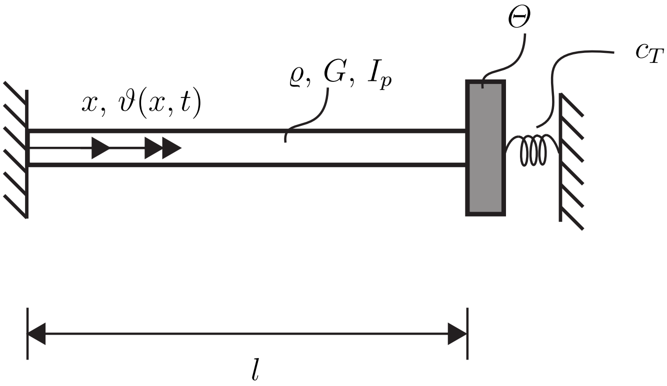
$$\omega_1 \leq \sqrt{20}\frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\varrho A}} \quad 1$$

Aufgabe 3

[10 Punkte]

An einem Torsionsstab (Dichte ϱ, Schubmodul G, polares Flächenträgheitsmoment I_p) ist eine starre Scheibe (Massenträgheitsmoment bzgl. x-Achse Θ) angebracht. Die Scheibe ist über eine für $\vartheta(l,t) = 0$ entspannte Torsionsfeder (Drehfedersteifigkeit c_T) mit der Umgebung verbunden. Mit dem Prinzip von Hamilton ist das Randwertproblem für die Torsionsschwingung $\vartheta(x,t)$ zu formulieren.

Gegeben: ϱ, G, I_p, l, Θ, c_T



a) Geben Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U und die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente an.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\Theta\dot{\vartheta}^2(l) \quad 1$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l G I_p \vartheta'^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2}c_T\vartheta^2(l) \quad 1$$

$$\delta W = 0 \quad 1$$

b) Geben Sie die geometrische(n) Randbedingung(en) für $\vartheta(x,t)$ an.

$$\vartheta(0,t) = 0 \quad 1$$

c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung für $\vartheta(x,t)$ sowie die dynamische(n) Randbedingung(en).

Nebenrechnungen:
Hamilton:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = 0$$

Variation

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta}^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \Theta \dot{\vartheta}^2(l) - \frac{1}{2} \int_0^l GI_p \vartheta'^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} c_T \vartheta^2(l) \right] \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta} \delta \dot{\vartheta} \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \Theta \dot{\vartheta}(l) \delta \dot{\vartheta}(l) \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l GI_p \vartheta' \delta \vartheta' \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} c_T \vartheta(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t = 0 \quad 1$$

partielle Integration

$$\int_0^l \varrho I_p \dot{\vartheta} \underbrace{\delta \vartheta \,\Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \varrho I_p \ddot{\vartheta} \delta \vartheta \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \Theta \dot{\vartheta}(l) \underbrace{\delta \vartheta(l) \,\Big|_{t_0}^{t_1}}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1} \Theta \ddot{\vartheta}(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} GI_p \vartheta' \delta \vartheta \,\Big|_0^l \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l GI_p \vartheta'' \delta \vartheta \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} c_T \vartheta(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t$$

$$= - \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \varrho I_p \ddot{\vartheta} \delta \vartheta \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} \Theta \ddot{\vartheta}(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} GI_p \vartheta'(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} GI_p \underbrace{\vartheta'(0)}_{=0} \delta \vartheta(0) \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l GI_p \vartheta'' \delta \vartheta \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} c_T \vartheta(l) \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t = 0 \quad 2$$

sortieren

$$- \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\varrho I_p \ddot{\vartheta} - GI_p \vartheta'' \right] \delta \vartheta \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1} \left[\Theta \ddot{\vartheta}(l) + GI_p \vartheta'(l) + c_T \vartheta(l) \right] \delta \vartheta(l) \mathrm{d}t = 0 \quad 2$$

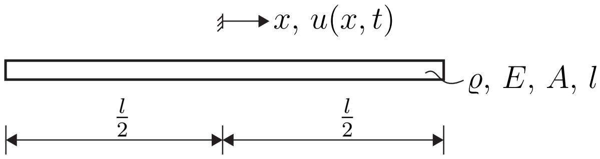
Hinweis: Bitte das Ergebnis auf der nächsten Seite eintragen.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Feldgleichung:}\\ \varrho I_p\ddot{\vartheta}(x,t) - GI_p\vartheta''(x,t) = 0\\ \text{dynamische Randbedingung:}\\ \Theta\ddot{\vartheta}(l) + GI_p\vartheta'(l) + c_T\vartheta(l) = 0\end{array}\right\}\ 1$$

Aufgabe 4

[10 Punkte]

Gegeben ist ein freier Stab (Länge l, Dichte ϱ, E-Modul E, Querschnittsfläche A), der freie Längsschwingungen $u(x,t)$ ausführen kann.



Gegeben: ϱ, E, A, l

Hinweis: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$, $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

a) Geben Sie die Feldgleichung für $u(x,t)$ und die Randbedingungen für $x = -\frac{l}{2}$, $x = \frac{l}{2}$ an. Verwenden Sie dabei **ausschließlich das eingezeichnete Koordinatensystem** ($x = 0$ in der Mitte des Stabes).

Feldgleichung:

$$\varrho A \ddot{u}(x,t) - EAu''(x,t) = 0 \quad 1$$

Randbedingungen:

$$u'\left(-\frac{l}{2}, t\right) = 0, \qquad u'\left(\frac{l}{2}, t\right) = 0 \quad 1$$

b) Leiten Sie mit dem Ansatz $u(x,t) = U(x)\sin(\omega t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $U(x)$ her und geben Sie deren allgemeine Lösung an.

Nebenrechnung:

$$(-\varrho A\omega^2 U(x) - EAU''(x))\sin(\omega t) = 0$$

$$\Rightarrow U''(x) + \underbrace{\frac{\omega^2 \varrho A}{EA}}_{=\frac{\omega^2}{c^2}} U(x) = 0$$

Differentialgleichung:

$$U''(x) + \frac{\omega^2}{c^2}U(x) = 0 \quad 1$$

allgemeine Lösung:

$$U(x) = A\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad 1$$

c) Bestimmen Sie die Eigenformen $U_k(x)$ und die Eigenkreisfrequenzen ω_k.

Nebenrechnung:

$$U'(x) = -A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

Anpassen an Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
U'\left(\frac{l}{2}\right) &= -A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0 \\
&\Rightarrow -A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0 \\
U'\left(-\frac{l}{2}\right) &= -A\frac{\omega}{c}\sin\left(-\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(-\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0 \\
&\underbrace{=}_{Hinweis} A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0 \\
&\Rightarrow A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) + B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0
\end{aligned}\right\} \quad 1$$

für nicht-triviale Lösungen sind zwei Fälle möglich: 1

i) $\underline{A = 0,\ B \neq 0\ :}$

$$B\frac{\omega}{c}\cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \cos\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{\omega}{c}\frac{l}{2} = \frac{(2k-1)\pi}{l} \;\Rightarrow\; \omega_k = \frac{(2k-1)\pi c}{l},\quad k = 1, 2, \ldots \quad 1$$

ii) $\underline{A \neq 0,\ B = 0\ :}$

$$A\frac{\omega}{c}\sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \sin\left(\frac{\omega}{c}\frac{l}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \omega_k = \frac{2k\pi c}{l},\quad k = 1, 2, \ldots \quad 1$$

Eigenformen:

$\widehat{U}_k(x) = B_k\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{l}x\right)$ und $\tilde{U}_k(x) = A_k\cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right)$ 1

Eigenkreisfrequenzen:

$\widehat{\omega}_k = \frac{(2k-1)\pi c}{l}$ und $\tilde{\omega}_k = \frac{2k\pi c}{l}$ 1

MMD Mechatronische Maschinendynamik Prof. Dr.-Ing. Utz v. Wagner	**Kontinuumsmechanik** Sommersemester 2015

Klausur vom 04.08.2015

Name, Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit.

Unterschrift

Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte	10	10	11	11	8	50
erreichte Punkte						
Handzeichen						

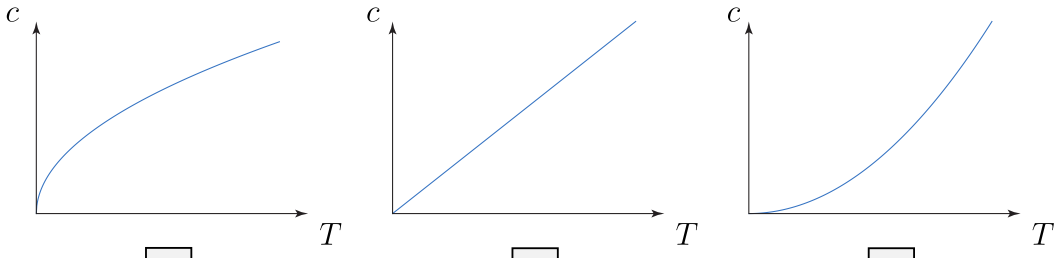
Theorieaufgaben

[10 Punkte]

Aufgabe T1

[1 Punkt]

Wie ist der qualitative Zusammenhang zwischen der Vorspannkraft T und der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c bei einer Saite mit konstanter Masse pro Länge μ? Kreuzen Sie den richtigen Verlauf an.



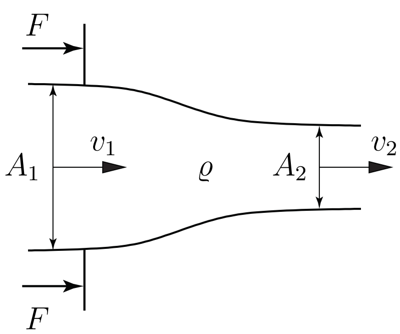
☐ ☐ ☐

Aufgabe T2

[1 Punkt]

Eine ideale Flüssigkeit strömt wie skizziert durch ein Rohr mit variablem Querschnitt. Kreuzen Sie die richtige Aussage für die Kraft F an, die das System im Gleichgewicht hält.

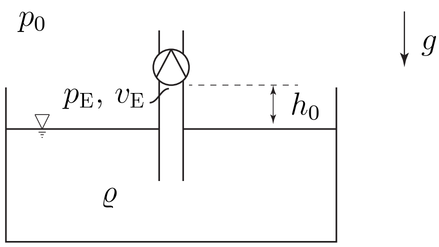
$F = 0$ ☐ $F > 0$ ☐ $F < 0$ ☐



Aufgabe T3

[1 Punkt]

Eine Pumpe soll benutzt werden, um eine ideale Flüssigkeit wie abgebildet aus dem offenen Reservoir gegen die Schwerkraft zu fördern. In welcher Höhe h_0 muss die Pumpe angebracht werden, wenn der Druck am Einlauf der Pumpe p_E und die Fließgeschwindigkeit v_E betragen soll und der Umgebungsdruck einheitlich p_0 beträgt?



Gegeben: p_E, v_E, h_0, p_0, g, ϱ

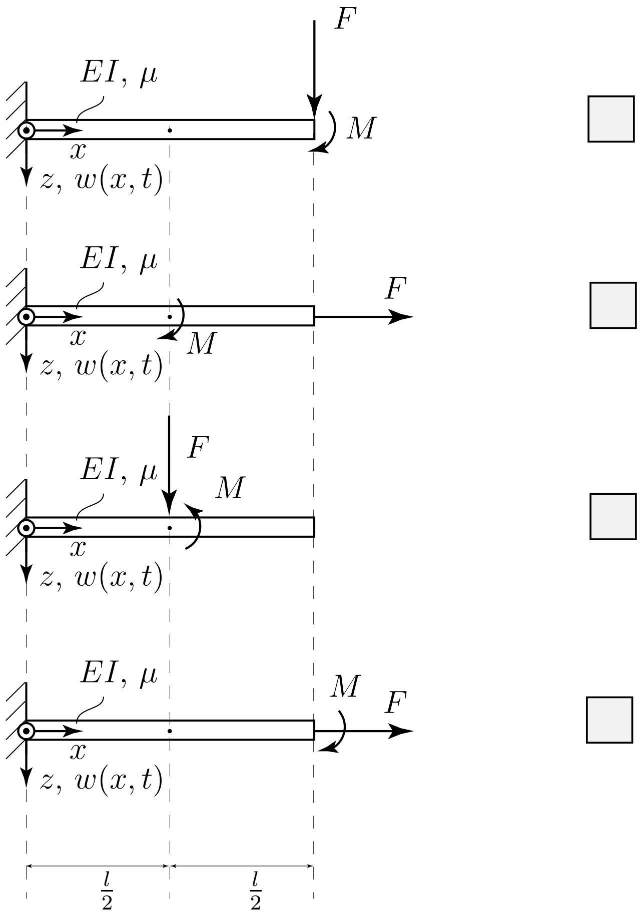
Nebenrechnung:
$h_0 =$

Aufgabe T4 [1 Punkt]

Für ein mechanisches System liefert das Prinzip von Hamilton folgenden Ausdruck:

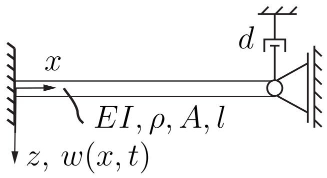
$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^l \left(\mu \dot{w}^2 - EIw'' - Fw'^2\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} M \delta w'(l,t) \, \mathrm{d}t = 0.$$

Für welche(s) der nachfolgend skizzierten Systeme ergibt sich dieser Ausdruck im Prinzip von Hamilton? Kreuzen Sie an.



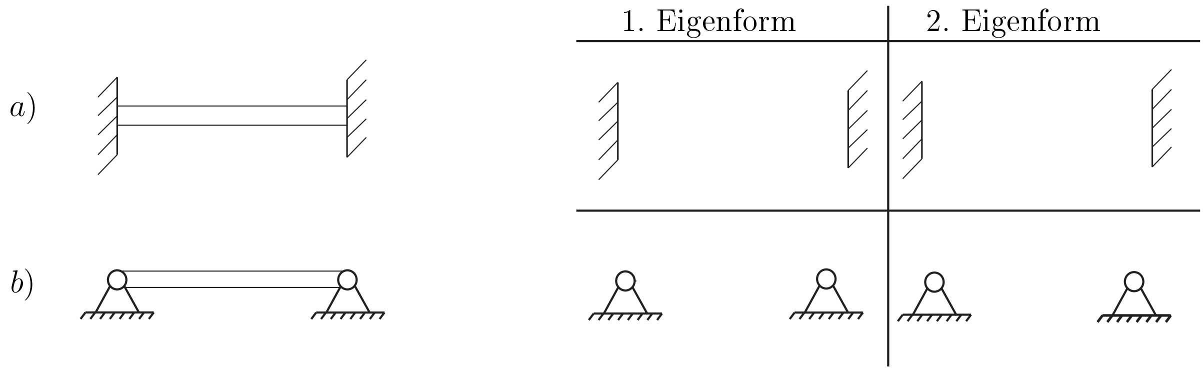
Aufgabe T5 [2 Punkte]

Geben Sie alle geometrischen und dynamischen Randbedingungen für den skizzierten Euler-Bernoulli-Balken an.



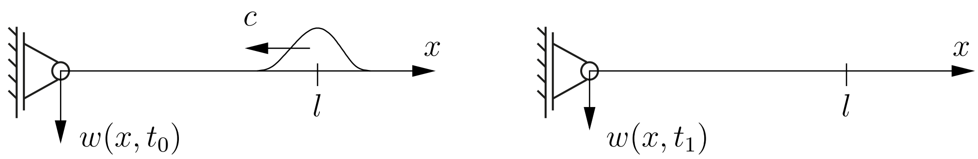
Aufgabe T6 [2 Punkte]

Skizzieren Sie für die beiden Euler-Bernoulli-Balken jeweils die erste und die zweite Eigenform.



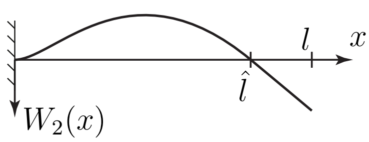
Aufgabe T7 [1 Punkt]

Eine Transversalwelle läuft in einer Saite mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c auf die Lagerung bei $x = 0$ zu. Ihr Maximum befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x = l$. Skizzieren Sie im rechten Diagramm die Verschiebung $w(x, t_1)$ zur Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$.

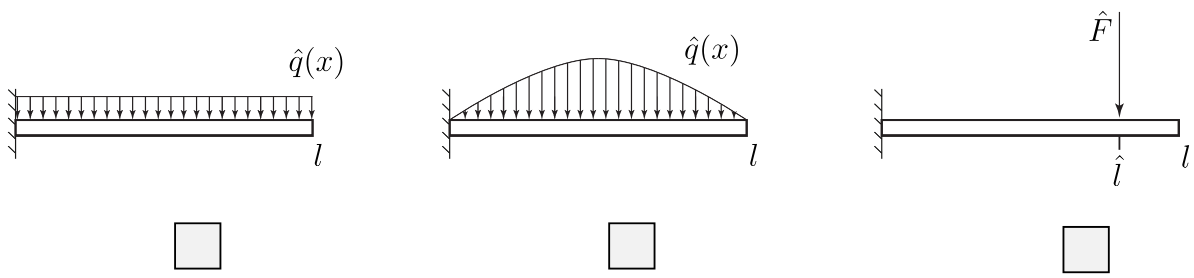


Aufgabe T8 [1 Punkt]

Ein einseitig fest eingespannter Euler Bernoulli-Balken besitzt die abgebildete 2. Eigenform $W_2(x)$ bei der zweiten Eigenkreisfrequenz ω_2 und wird mit einer Streckenlast $q(x, t) = \hat{q}(x)\cos(\omega_2 t)$ bzw. mit einer Einzellast $F(t) = \hat{F}\cos(\omega_2 t)$ zu Schwingungen angeregt.



Kreuzen Sie die Belastung(en) an, die dabei **nicht** zu Resonanz führt/führen.

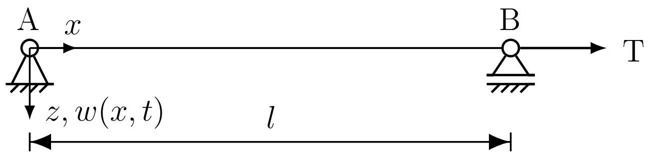


Aufgabe 1

[10 Punkte]

Die skizzierte Saite (Länge l, Masse pro Länge μ) wird durch die Kraft T vorgespannt.

Gegeben: T, l, μ



a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an. Wie groß ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c ?

Ergebnisse:

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen.

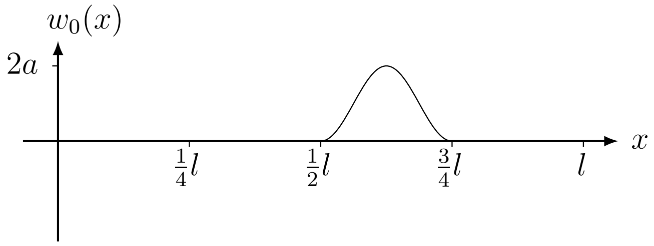
Nebenrechnung:
Eigenkreisfrequenzen:

c) Es seien nun die folgenden Anfangsbedingungen für $t = 0$ gegeben:

$$w(x,0) = w_0(x) = \begin{cases} -a\cos\left[8\pi(\frac{x}{l} - \frac{1}{2})\right] + a & \text{für } \frac{1}{2}l < x < \frac{3}{4}l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

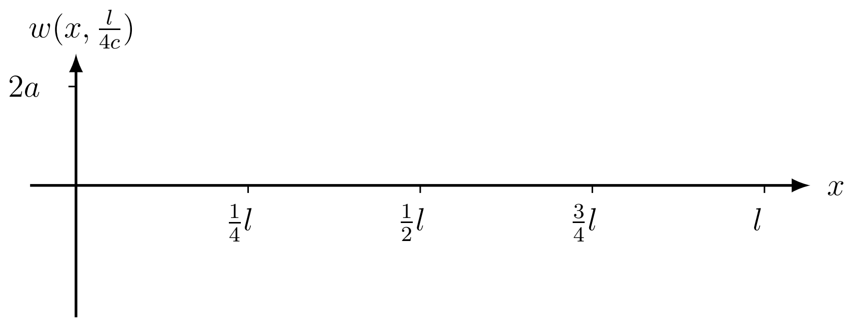
$$\dot{w}(x,0) = v_0(x) = 0$$

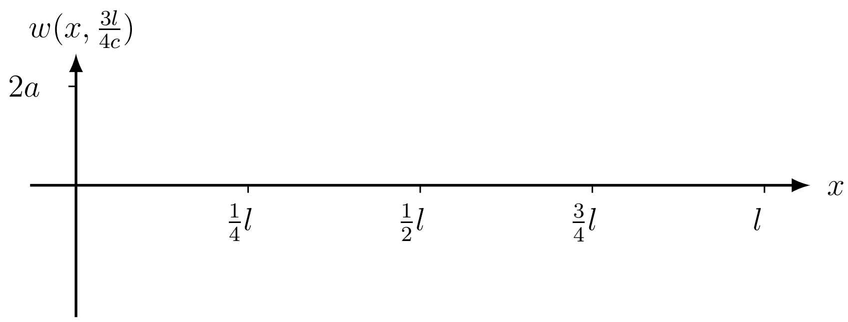
Skizze für $w_0(x)$:



Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c wird nun als bekannt vorrausgesetzt. Skizzieren Sie die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt $t = l/4c$ und zum Zeitpunkt $t = 3l/4c$.

Skizzen:





d) Für kleine Zeiten t kann die Verschiebung $w(x,t)$ mit der Formel

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct) + \frac{1}{c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\ \mathrm{d}\xi\right]$$

berechnet werden. Bis zu welcher Zeit t^* ist diese Lösung gültig? Geben Sie $w(x, l/8c)$ an.

Nebenrechnung:

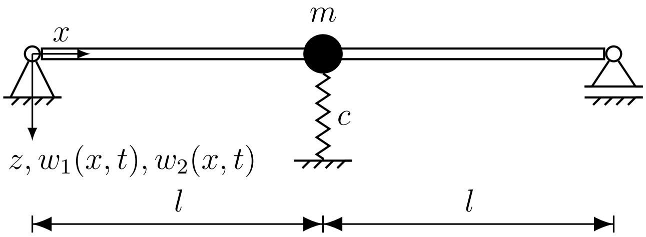
$t^* =$

$w(x, l/8c) =$

Aufgabe 2 [11 Punkte]

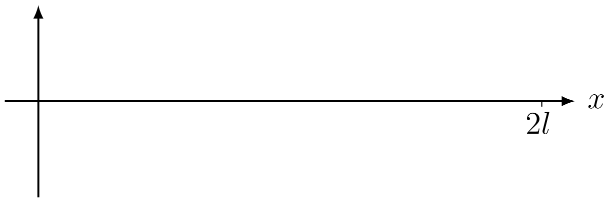
Die Durchbiegung des skizzierten Balkens (Länge $2l$, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI) wird im Bereich $0 \leq x \leq l$ durch $w_1(x,t)$ und im Bereich $l \leq x \leq 2l$ durch $w_2(x,t)$ beschrieben. Der Balken wird an der Stelle $x = l$ durch eine Feder (Federsteifigkeit c, entspannt für $w_1(l,t) = w_2(l,t) = 0$) gestützt und trägt an dieser Stelle eine Punktmasse m.

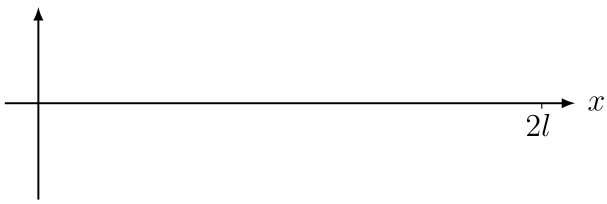
Gegeben: EI, l, μ, m, c



a) Skizzieren Sie die zwei Schwingformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen (ohne Rechnung).

Skizzen:





b) Geben Sie die Feldgleichungen für $w_1(x,t)$ im Bereich $0 \leq x \leq l$ und $w_2(x,t)$ im Bereich $l \leq x \leq 2l$ an.

Feldgleichungen:

c) Geben Sie die Randbedingungen sowie für die Stelle $x = l$ die Übergangsbedingungen an.

Nebenrechnung:
Rand und Übergangsbedingungen:

d) Bestimmen Sie mit der Ansatzfunktion $W(x) = x(2l-x)$ mit Hilfe des Rayleigh-Quotientens eine obere Schranke für die niedrigste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Sonderfall $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Nebenrechnung:
Ergebnis:

e) Die jeweils niedrigste Eigenkreisfrequenz wird für die Fälle

- $m = 0$ und $c = 0$ mit $\widehat{\omega}_1$
- $m > 0$ und $c = 0$ mit $\overline{\omega}_1$
- $m = 0$ und $c > 0$ mit $\widetilde{\omega}_1$

bezeichnet. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

Nebenrechnung:

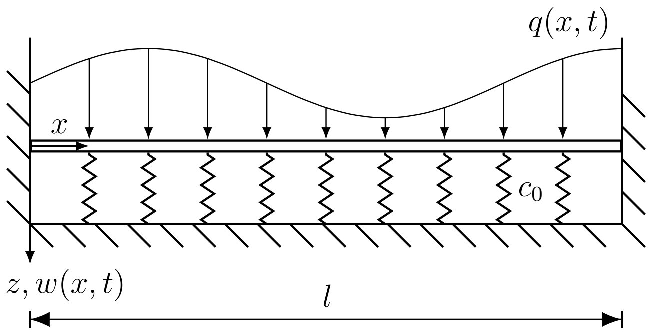
$\widehat{\omega}_1 < \overline{\omega}_1$	☐	$\widehat{\omega}_1 < \widetilde{\omega}_1$	☐
$\widehat{\omega}_1 = \overline{\omega}_1$	☐	$\widehat{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_1$	☐
$\widehat{\omega}_1 > \overline{\omega}_1$	☐	$\widehat{\omega}_1 > \widetilde{\omega}_1$	☐

Aufgabe 3

[11 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte beidseitig fest eingespannte schlanke Euler-Bernoulli Balken (Länge l, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI). Der Balken ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c_0) und wird durch eine Streckenlast $q(x,t)$ belastet. Mit dem Prinzip von Hamilton sind die Feldgleichung sowie die Randbedingungen zu bestimmen.

Gegeben: l, μ, EI, c_0, $q(x,t)$



a) Geben Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U sowie die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente an.

$T =$

$U =$

$\delta W =$

b) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung und -falls existierend- die dynamische(n) Randbedingung(en).

Nebenrechnung:

Ergebnisse:

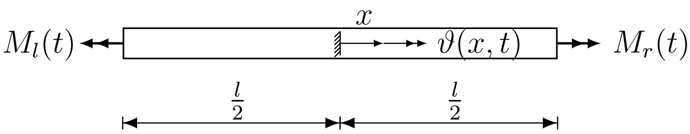
Aufgabe 4

[8 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte freie Torsionsstab (Länge l, Dichte ρ, Schubmodul G, Polares Flächenträgheitsmoment I_p), der an seinem linken Ende durch das Moment $M_l(t)$ und an seinem rechten Ende durch das Moment $M_r(t)$ belastet wird.
Hinweis: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Benutzen Sie das vorgegebene Koordinatensystem.

Gegeben: l, ρ, G, I_p, $M_l(t)$, $M_r(t)$



a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen für die Torsionsschwingung $\vartheta(x,t)$ an.

Nebenrechnung:
Ergebnisse:

b) Bestimmen Sie für den Fall der freien Schwingung ($M_l(t) = M_r(t) = 0$) mit dem Ansatz $\vartheta(x,t) = \theta(x)\sin(\omega t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\theta(x)$ und geben Sie deren allgemeine Lösung sowie die zugehörigen Randbedingungen an.

Nebenrechnung:
Differentialgleichung: Lösung: Randbedingungen:

c) Als Lösung des Problems aus b) ergeben sich jeweils für $k = 1, 2, \ldots$ folgende Eigenkreisfrequenzen ω_{2k-1}, ω_{2k} und Eigenformen $\theta_{2k-1}(x)$, $\theta_{2k}(x)$

$$\omega_{2k-1} = (2k-1)\widetilde{C}, \qquad \theta_{2k-1}(x) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{l}x\right),$$
$$\omega_{2k} = 2k\widehat{C}, \qquad \theta_{2k}(x) = \cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right).$$

Geben Sie die Erregerkreisfrequenzen Ω_1 und Ω_2 an, für die es in den folgenden Fällen zu Resonanz kommt:

1. $M_l(t) = M_0 \sin(\Omega_1 t)$, $\quad M_r(t) = M_0 \sin(\Omega_1 t)$,
2. $M_l(t) = M_0 \sin(\Omega_2 t)$, $\quad M_r(t) = -M_0 \sin(\Omega_2 t)$.

Überlegen Sie dazu, welche der Eigenformen durch welche äußeren Momente angeregt werden können.

Nebenrechnung:
Erregerkreisfrequenzen Ω_1, Ω_2:

MMD Mechatronische Maschinendynamik Prof. Dr.-Ing. Utz v. Wagner	**Kontinuumsmechanik** Sommersemester 2015

Lösungsvorschlag zur Klausur vom 04.08.2015

Lösungsvorschlag

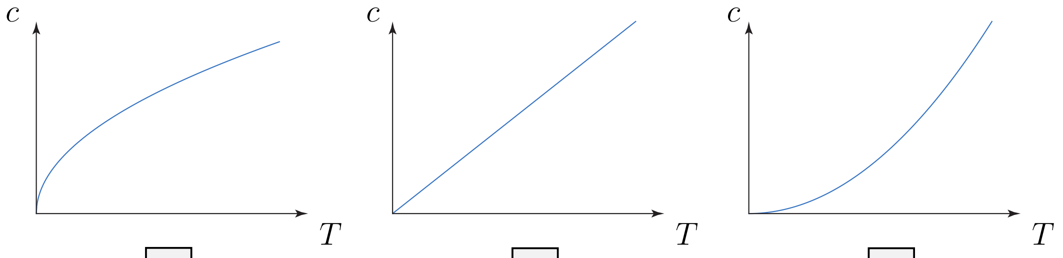
Theorieaufgaben

[10 Punkte]

Aufgabe T1

[1 Punkt]

Wie ist der qualitative Zusammenhang zwischen der Vorspannkraft T und der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c bei einer Saite mit konstanter Masse pro Länge μ? Kreuzen Sie den richtigen Verlauf an.

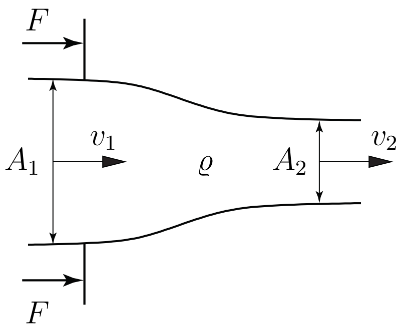


[X]	[ ]	[ ]

Aufgabe T2

[1 Punkt]

Eine ideale Flüssigkeit strömt wie skizziert durch ein Rohr mit variablem Querschnitt. Kreuzen Sie die richtige Aussage für die Kraft F an, die das System im Gleichgewicht hält.

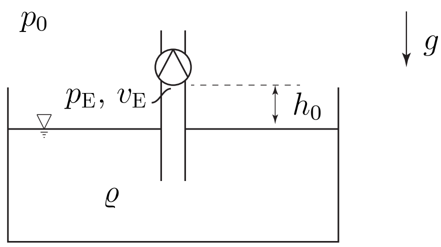


$F = 0$	$F > 0$	$F < 0$
[ ]	[X]	[ ]

Aufgabe T3

[1 Punkt]

Eine Pumpe soll benutzt werden, um eine ideale Flüssigkeit wie abgebildet aus dem offenen Reservoir gegen die Schwerkraft zu fördern. In welcher Höhe h_0 muss die Pumpe angebracht werden, wenn der Druck am Einlauf der Pumpe p_E und die Fließgeschwindigkeit v_E betragen soll und der Umgebungsdruck einheitlich p_0 beträgt?



Gegeben: p_E, v_E, h_0, p_0, g, ϱ

Nebenrechnung:

$$p_0 = p_\mathrm{E} + \frac{1}{2}\varrho v_\mathrm{E}^2 + \varrho g h_0$$

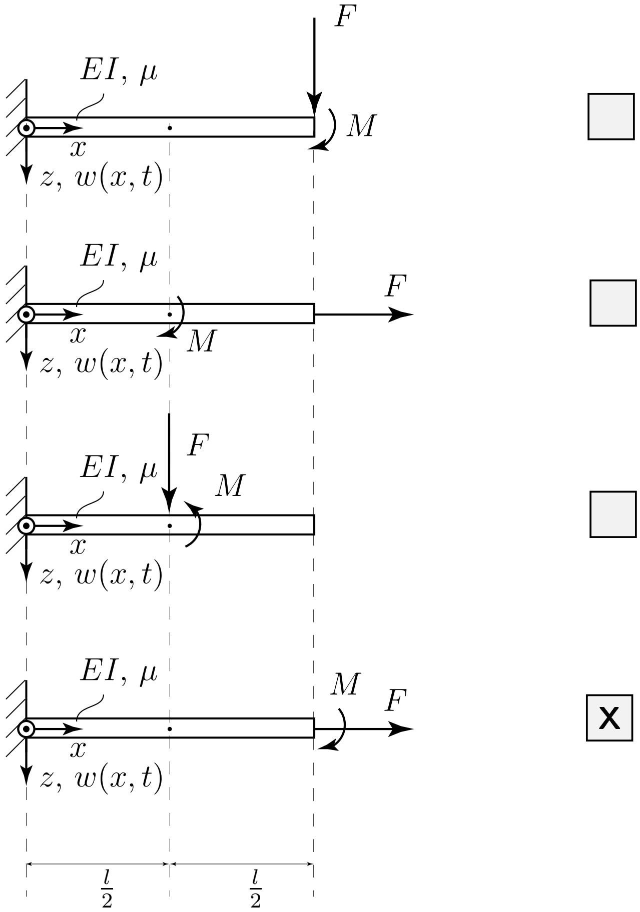
$$h_0 = \frac{p_0 - p_\mathrm{E} - \frac{1}{2}\varrho v_\mathrm{E}^2}{\varrho g}$$

Aufgabe T4 [1 Punkt]

Für ein mechanisches System liefert das Prinzip von Hamilton folgenden Ausdruck:

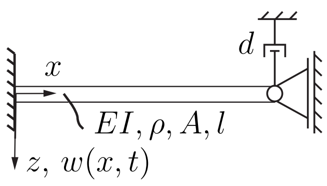
$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_0^l \left(\mu \dot{w}^2 - EI w'' - F w'^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} M \delta w'(l,t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Für welche(s) der nachfolgend skizzierten Systeme ergibt sich dieser Ausdruck im Prinzip von Hamilton? Kreuzen Sie an.



Aufgabe T5 [2 Punkte]

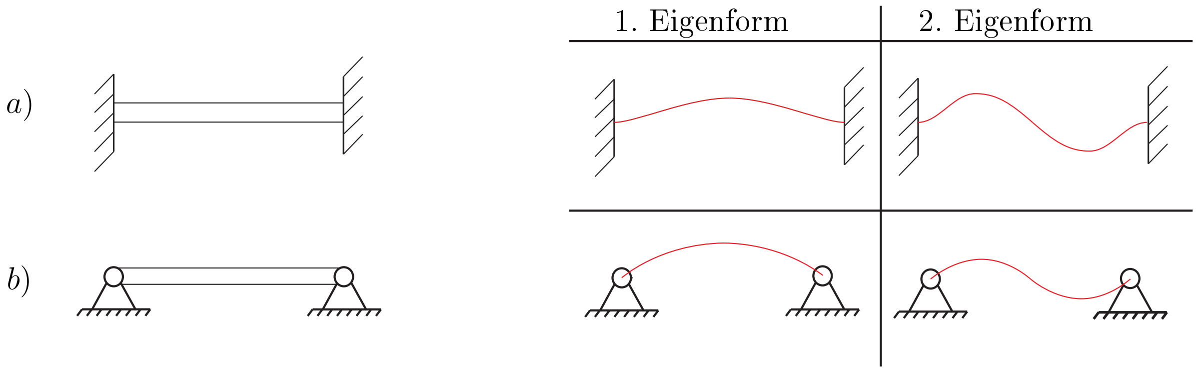
Geben Sie alle geometrischen und dynamischen Randbedingungen für den skizzierten Euler-Bernoulli-Balken an.



$$w(0,t) = 0 \qquad w'(0,t) = 0$$
$$w''(l,t) = 0 \qquad w'''(l,t) = \frac{d\dot{w}(l,t)}{EI}$$

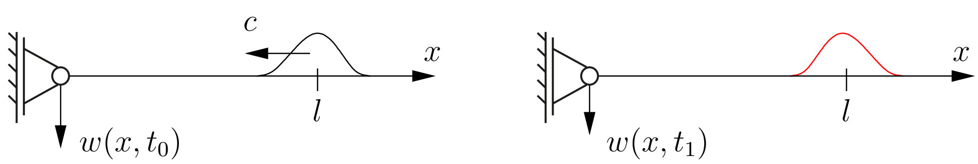
Aufgabe T6 [2 Punkte]

Skizzieren Sie für die beiden Euler-Bernoulli-Balken jeweils die erste und die zweite Eigenform.



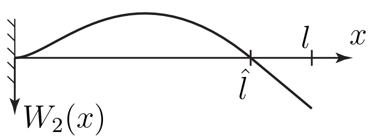
Aufgabe T7 [1 Punkt]

Eine Transversalwelle läuft in einer Saite mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c auf die Lagerung bei $x = 0$ zu. Ihr Maximum befindet sich zur Zeit $t_0 = 0$ bei $x = l$. Skizzieren Sie im rechten Diagramm die Verschiebung $w(x, t_1)$ zur Zeit $t_1 = \frac{2l}{c}$.

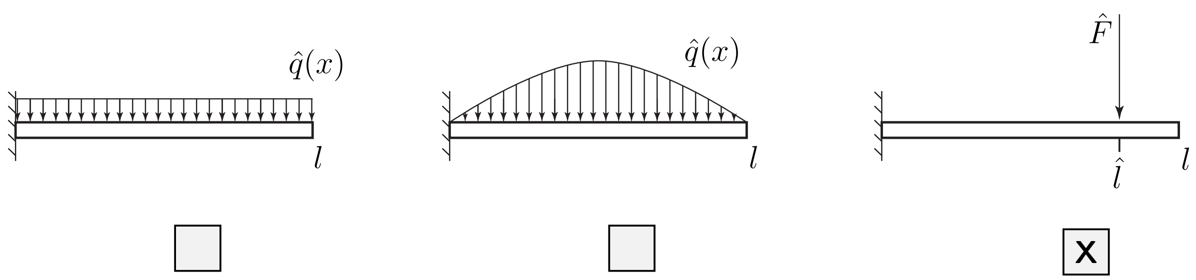


Aufgabe T8 [1 Punkt]

Ein einseitig fest eingespannter Euler Bernoulli-Balken besitzt die abgebildete 2. Eigenform $W_2(x)$ bei der zweiten Eigenkreisfrequenz ω_2 und wird mit einer Streckenlast $q(x, t) = \hat{q}(x) \cos(\omega_2 t)$ bzw. mit einer Einzellast $F(t) = \hat{F} \cos(\omega_2 t)$ zu Schwingungen angeregt.



Kreuzen Sie die Belastung(en) an, die dabei **nicht** zu Resonanz führt/führen.

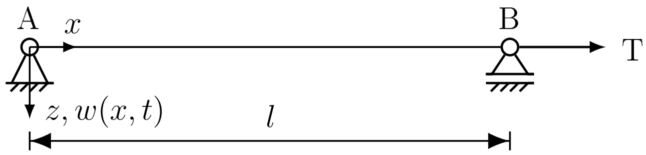


Aufgabe 1

[10 Punkte]

Die skizzierte Saite (Länge l, Masse pro Länge μ) wird durch die Kraft T vorgespannt.

Gegeben: T, l, μ



a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an. Wie groß ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c ?

Ergebnisse:

Feldgleichung: $\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0$ 1

Randbedingungen: $w(0,t) = w(l,t) = 0$ 1

Wellenausbreitungsgeschwindigkeit: $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ 1

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen.

Nebenrechnung:

Ansatz: $w(x,t) = W(x)p(t)$

Lösung: $W(x) = A\cos(\frac{\omega}{c}x) + B\sin(\frac{\omega}{c}x)$

Anpassen an Randbedingungen:

$W(0) = A = 0 \longrightarrow A = 0$ 1

$W(l) = B\sin(\frac{\omega}{c}l) = 0 \longrightarrow \sin(\frac{\omega}{c}l) = 0 \longrightarrow \frac{\omega_k}{c}l = k\pi,\ k = 1, 2, \ldots$ 1

Eigenkreisfrequenzen:

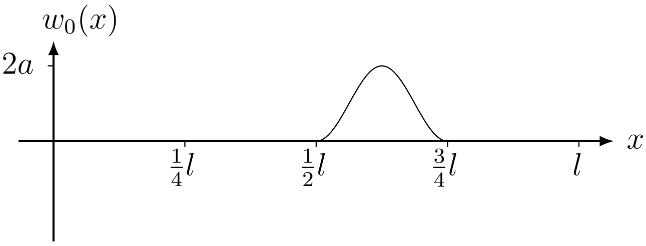
$\omega_k = \frac{k\pi c}{l},\ k = 1, 2, \ldots$

c) Es seien nun die folgenden Anfangsbedingungen für $t = 0$ gegeben:

$$w(x,0) = w_0(x) = \begin{cases} -a\cos\left[8\pi(\frac{x}{l} - \frac{1}{2})\right] + a & \text{für } \frac{1}{2}l < x < \frac{3}{4}l \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

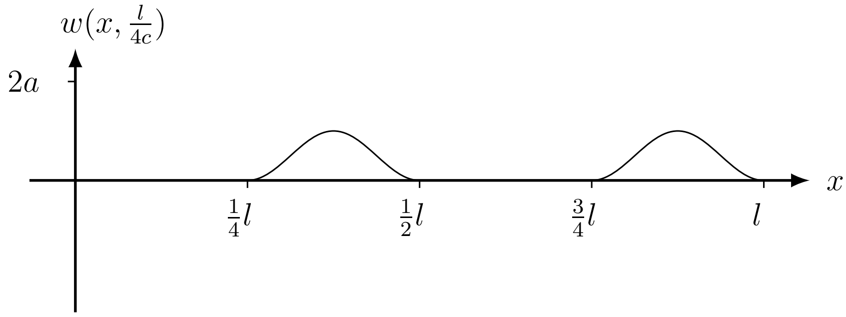
$$\dot{w}(x,0) = v_0(x) = 0$$

Skizze für $w_0(x)$:

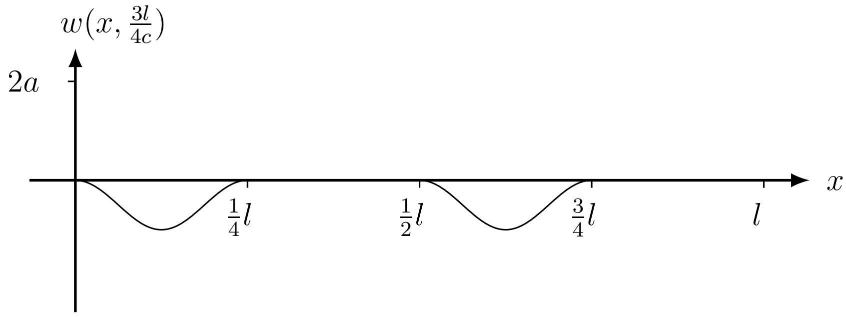


Die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c wird nun als bekannt vorrausgesetzt. Skizzieren Sie die Auslenkung der Saite zum Zeitpunkt $t = l/4c$ und zum Zeitpunkt $t = 3l/4c$.

Skizzen:



1



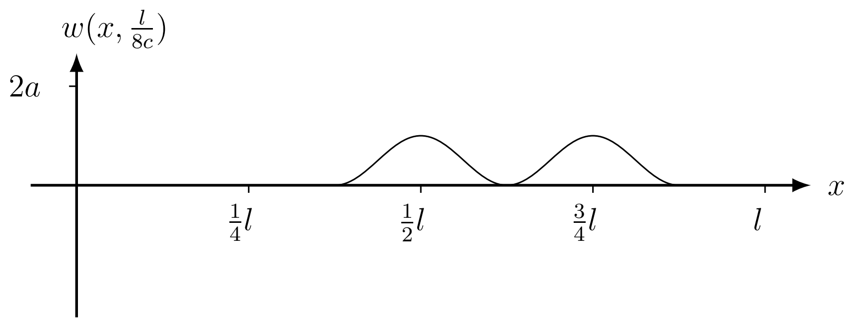
1

d) Für kleine Zeiten t kann die Verschiebung $w(x,t)$ mit der Formel

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x-ct) + w_0(x+ct) + \frac{1}{c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]$$

berechnet werden. Bis zu welcher Zeit t^* ist diese Lösung gültig? Geben Sie $w(x, l/8c)$ an.

Nebenrechnung:



$t^* = \frac{l}{4c}$ 1

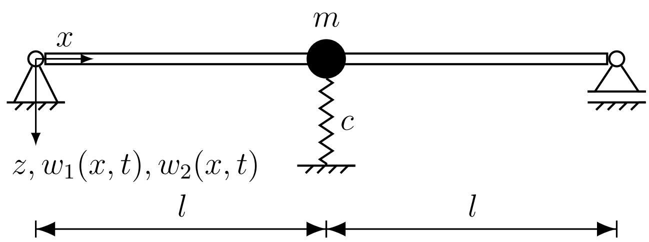
$$w(x, l/8c) = \begin{cases} -\frac{1}{2}a\cos\left[8\pi\left(\frac{x+l/8}{l}-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}a, & \text{falls } \frac{3}{8}l \le x \le \frac{5}{8}l \\ -\frac{1}{2}a\cos\left[8\pi\left(\frac{x-l/8}{l}-\frac{1}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}a, & \text{falls } \frac{5}{8}l \le x \le \frac{7}{8}l \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$ 2

Aufgabe 2

[11 Punkte]

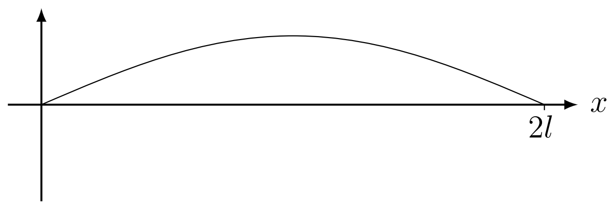
Die Durchbiegung des skizzierten Balkens (Länge $2l$, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI) wird im Bereich $0 \leq x \leq l$ durch $w_1(x,t)$ und im Bereich $l \leq x \leq 2l$ durch $w_2(x,t)$ beschrieben. Der Balken wird an der Stelle $x = l$ durch eine Feder (Federsteifigkeit c, entspannt für $w_1(l,t) = w_2(l,t) = 0$) gestützt und trägt an dieser Stelle eine Punktmasse m.

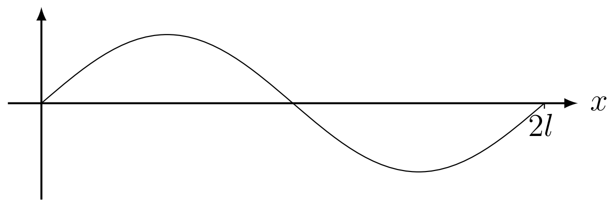
Gegeben: EI, l, μ, m, c



a) Skizzieren Sie die zwei Schwingformen mit den niedrigsten Eigenkreisfrequenzen (ohne Rechnung).

Skizzen:





1

b) Geben Sie die Feldgleichungen für $w_1(x,t)$ im Bereich $0 \leq x \leq l$ und $w_2(x,t)$ im Bereich $l \leq x \leq 2l$ an.

Feldgleichungen:

$0 \leq x \leq l: \; \ddot{w}_1(x,t) + \frac{EI}{\mu} w_1''''(x,t) = 0$ 1

$l \leq x \leq 2l: \; \ddot{w}_2(x,t) + \frac{EI}{\mu} w_2''''(x,t) = 0$ 1

c) Geben Sie die Randbedingungen sowie für die Stelle $x = l$ die Übergangsbedingungen an.

Nebenrechnung:

Rand und Übergangsbedingungen:

Randbedingungen:

$w_1(0,t) = 0$
$w_1''(0,t) = 0$ 1
$w_2(2l,t) = 0$
$w_2''(2l,t) = 0$

Übergangsbedingungen:

$w_1(l,t) = w_2(l,t)$
$w_1'(l,t) = w_2'(l,t)$ 1
$w_1''(l,t) = w_2''(l,t)$

$m\ddot{w}_1(l,t) + cw_1(l,t) + EI(w_2'''(l,t) - w_1'''(l,t)) = 0$ 1

d) Bestimmen Sie mit der Ansatzfunktion $W(x) = x(2l-x)$ mit Hilfe des Rayleigh-Quotientens eine obere Schranke für die niedrigste Eigenkreisfrequenz ω_1 für den Sonderfall $\mathbf{m} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Nebenrechnung:

$$\int_0^{2l} EI(W''(x))^2 \,\mathrm{d}x = 4EI\int_0^{2l} \mathrm{d}x = 8lEI$$ 1

$$\int_0^{2l} \mu W^2(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_0^{2l}(4l^2x^2 - 4lx^3 + x^4)\,\mathrm{d}x = \mu l^5\left(\tfrac{32}{3} - \tfrac{64}{4} + \tfrac{32}{5}\right) = \tfrac{16}{15}\mu l^5$$ 1

Ergebnis:

$$\omega_1^2 \leq \frac{15EI}{2\mu l^4} \longrightarrow \omega_1 \leq \sqrt{\frac{15}{2}}\sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$ 1

e) Die jeweils niedrigste Eigenkreisfrequenz wird für die Fälle

- $m = 0$ und $c = 0$ mit $\widehat{\omega}_1$
- $m > 0$ und $c = 0$ mit $\overline{\omega}_1$
- $m = 0$ und $c > 0$ mit $\widetilde{\omega}_1$

bezeichnet. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

Nebenrechnung:

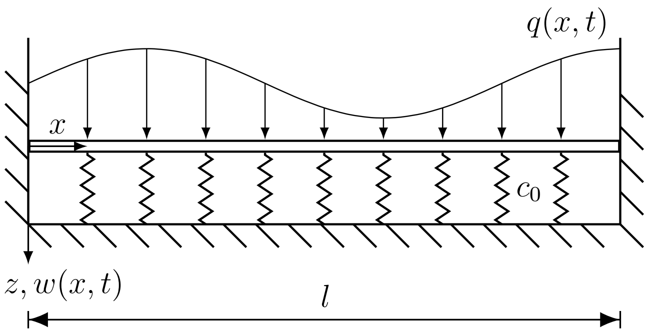
$\widehat{\omega}_1 < \overline{\omega}_1$	☐		$\widehat{\omega}_1 < \widetilde{\omega}_1$	☒	
$\widehat{\omega}_1 = \overline{\omega}_1$	☐	1	$\widehat{\omega}_1 = \widetilde{\omega}_1$	☐	1
$\widehat{\omega}_1 > \overline{\omega}_1$	☒		$\widehat{\omega}_1 > \widetilde{\omega}_1$	☐	

Aufgabe 3

[11 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte beidseitig fest eingespannte schlanke Euler-Bernoulli Balken (Länge l, Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI). Der Balken ist elastisch gebettet (Bettungssteifigkeit c_0) und wird durch eine Streckenlast $q(x,t)$ belastet. Mit dem Prinzip von Hamilton sind die Feldgleichung sowie die Randbedingungen zu bestimmen.

Gegeben: l, μ, EI, c_0, $q(x,t)$



a) Geben Sie die kinetische Energie T, die potentielle Energie U sowie die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente an.

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\ \mathrm{d}x \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \left(EI w''^2(x,t) + c_0 w^2(x,t)\right)\ \mathrm{d}x \quad (1)$$

$$\delta W = \int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x \quad (1)$$

b) Geben Sie die geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

$w(0,t) = 0$
$w'(0,t) = 0$ (1)

$w(l,t) = 0$
$w'(l,t) = 0$ (1)

c) Bestimmen Sie mit dem Prinzip von Hamilton die Feldgleichung und -falls existierend- die dynamische(n) Randbedingung(en).

Nebenrechnung:

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} \int_0^l \mu \dot{w}^2(x,t)\ \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^l \left(EIw''^2(x,t) + c_0 w^2(x,t)\right)\ \mathrm{d}x + \int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x \right]\ \mathrm{d}t \quad (1)$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu \dot{w}(x,t)\delta\dot{w}(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EIw''(x,t)\delta w''(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l c_0 w(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \quad (1)$$

$$= \underbrace{\int_0^l \Big[\mu\dot{w}(x,t)\delta w(x,t)\Big]_{t_0}^{t_1}\ \mathrm{d}x}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mu\ddot{w}(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \quad (1)$$

$$\underbrace{- \int_{t_0}^{t_1} \Big[EIw''(x,t)\delta w'(x,t)\Big]_0^l\ \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \Big[EIw'''(x,t)\delta w(x,t)\Big]_0^l\ \mathrm{d}t}_{=0} - \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l EIw''''(x,t)\delta w(x,t)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}t \quad (2)$$

$$- \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l c_0 w(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l q(x,t)\delta w(x,t)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t$$

Ergebnisse:

Feldgleichung: $\mu\ddot{w}(x,t) + EIw''''w(x,t) + c_0 w(x,t) = q(x,t)$ (1)

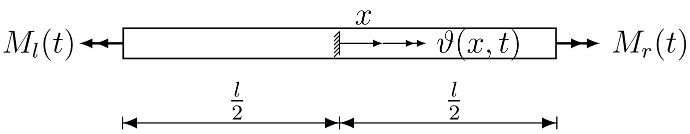
Aufgabe 4

[8 Punkte]

Gegeben ist der skizzierte freie Torsionsstab (Länge l, Dichte ρ, Schubmodul G, Polares Flächenträgheitsmoment I_p), der an seinem linken Ende durch das Moment $M_l(t)$ und an seinem rechten Ende durch das Moment $M_r(t)$ belastet wird.
Hinweis: $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ und $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$.

Benutzen Sie das vorgegebene Koordinatensystem.

Gegeben: l, ρ, G, I_p, $M_l(t)$, $M_r(t)$



a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen für die Torsionsschwingung $\vartheta(x,t)$ an.

Nebenrechnung:

Ergebnisse:

Feldgleichung: $\ddot{\vartheta}(x,t) - c^2\vartheta''(x,t) = 0$ mit $c^2 = \frac{G}{\rho}$ 1

Randbedingungen:

$\vartheta'(-\frac{l}{2},t)GI_p = M_l(t)$ 1 $\vartheta'(\frac{l}{2},t)GI_p = M_r(t)$ 1

b) Bestimmen Sie für den Fall der freien Schwingung ($M_l(t) = M_r(t) = 0$) mit dem Ansatz $\vartheta(x,t) = \theta(x)\sin(\omega t)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\theta(x)$ und geben Sie deren allgemeine Lösung sowie die zugehörigen Randbedingungen an.

Nebenrechnung:

Ansatz in Feldgleichung: $-\omega^2\Theta(x)\sin(\omega t) - c^2\Theta''(x)\sin(\omega t) = 0$

Differentialgleichung: $\Theta''(x) + (\frac{\omega}{c})^2\Theta(x) = 0$ 1

Lösung: $\Theta(x) = A\cos(\frac{\omega}{c}x) + B\sin(\frac{\omega}{c}x)$ 1

Randbedingungen: $\Theta(-\frac{l}{2}) = \Theta(\frac{l}{2}) = 0$ 1

c) Als Lösung des Problems aus b) ergeben sich jeweils für $k = 1, 2, \ldots$ folgende Eigenkreisfrequenzen ω_{2k-1}, ω_{2k} und Eigenformen $\theta_{2k-1}(x)$, $\theta_{2k}(x)$

$$\omega_{2k-1} = (2k-1)\widetilde{C}, \qquad \theta_{2k-1}(x) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{l}x\right),$$
$$\omega_{2k} = 2k\widehat{C}, \qquad \theta_{2k}(x) = \cos\left(\frac{2k\pi}{l}x\right).$$

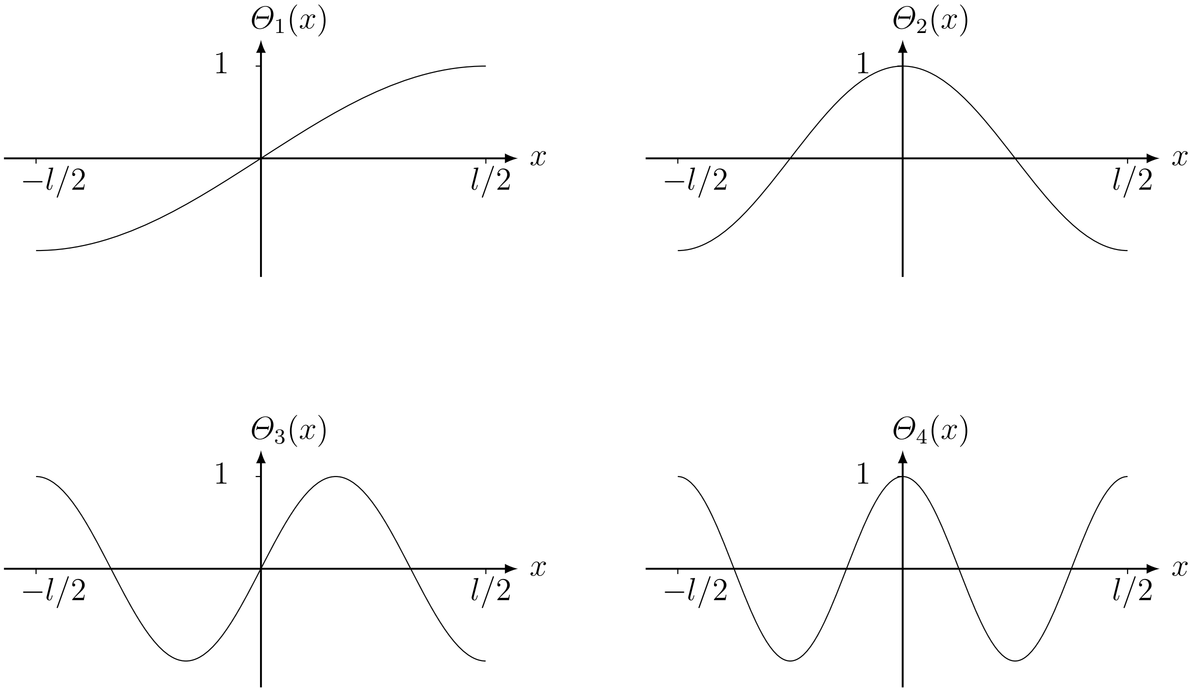
Geben Sie die Erregerkreisfrequenzen Ω_1 und Ω_2 an, für die es in den folgenden Fällen zu Resonanz kommt:

1. $M_l(t) = M_0 \sin(\Omega_1 t), \quad M_r(t) = M_0 \sin(\Omega_1 t),$
2. $M_l(t) = M_0 \sin(\Omega_2 t), \quad M_r(t) = -M_0 \sin(\Omega_2 t).$

Überlegen Sie dazu, welche der Eigenformen durch welche äußeren Momente angeregt werden können.

Nebenrechnung:

Anschaulich durch Interpretation der Eigenformen:



Erregerkreisfrequenzen Ω_1, Ω_2:

$\Omega_1 = \omega_{2k-1}$ 1

$\Omega_2 = \omega_{2k}$ 1

MMD Mechatronische Maschinendynamik Prof. Dr.-Ing. Utz v. Wagner	Kontinuumsmechanik Sommersemester 2017

Klausur vom 28.07.2017

Name

Vorname

Studiengang

Matrikelnummer

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit.

Unterschrift

Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte						
Erreichte Punkte						
Handzeichen						

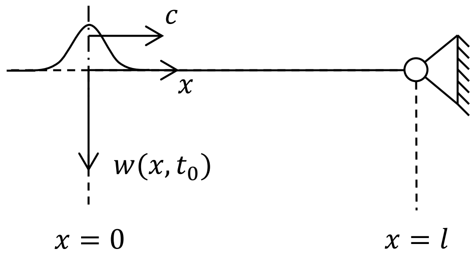
Theorieaufgaben

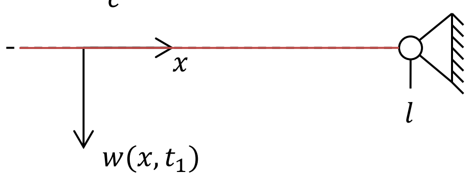
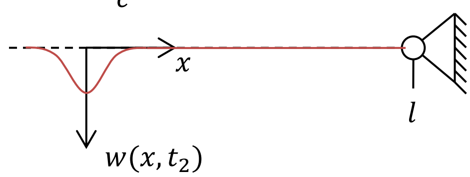
[10 Punkte]

Aufgabe T1

[2 Punkte]

In einer Saite läuft die skizzierte Transversalwelle mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c auf das Lager bei $x = l$ zu. Ihr Maximum ist zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei $x = 0$. Skizzieren Sie in den beiden unteren Diagrammen die Verschiebungen $w(x,t_1)$ mit $t_1 = \frac{l}{c}$ bzw. $w(x,t_2)$ mit $t_2 = \frac{2l}{c}$.



$t = t_1 = \frac{l}{c}$ **1 Punkt** 	$t = t_1 = \frac{2l}{c}$ **1 Punkt** 

Aufgabe T2

[1 Punkt]

Die eindimensionale Wellengleichung $\ddot{w}(x,t) - c^2 w''(x,t) = 0$ besitzt die Lösung $w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Was beschreibt der Ausdruck $f_2(x + ct)$ dabei anschaulich? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an.

1 Punkt

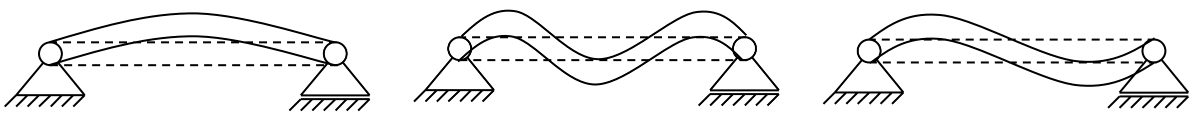
- ■ eine mit der Geschwindigkeit c in negative x-Richtung laufende Welle
- □ eine mit der Geschwindigkeit c in positive x-Richtung laufende Welle
- □ eine Schwingung mit steigender Amplitude
- □ eine Schwingung mit fallender Amplitude

Aufgabe T3

[1 Punkt]

Der skizzierte Balken besitzt die niedrigsten drei Eigenfrequenzen 100 Hz, 400 Hz und 900 Hz. Ordnen Sie die jeweiligen Eigenfrequenzen den unten abgebildeten Schwingformen zu.

1 Punkt

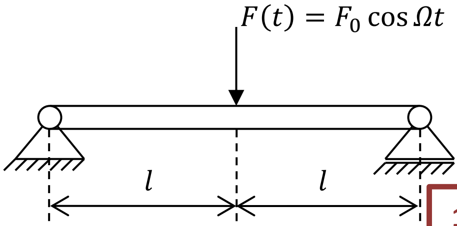


$f = 100$ Hz	$f = 900$ Hz	$f = 400$ Hz

Aufgabe T4

[1 Punkt]

Gegeben ist der rechts skizzierte statisch bestimmt gelagerte homogene Euler-Bernoulli-Balken mit konstantem Querschnitt, welcher mittig mit der Einzellast $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ zu Schwingungen angeregt wird. Kreuzen Sie alle wahren Aussagen an.



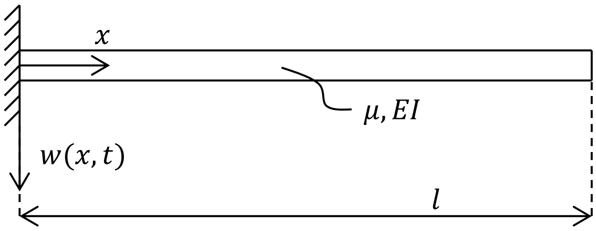
1 Punkt

■	Wenn die Erregerkreisfrequenz Ω gleich der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 ist, tritt Resonanz auf.
☐	Wenn die Erregerkreisfrequenz Ω gleich der zweiten Eigenkreisfrequenz ω_2 ist, tritt Resonanz auf.
☐	eine Erhöhung der Amplitude F_0 führt zu einer Erhöhung der Eigenkreisfrequenz ω_1
☐	eine Erhöhung der Amplitude F_0 führt zu einer Verringerung der Eigenkreisfrequenz ω_1

Aufgabe T5

[1 Punkt]

Gegeben ist der skizzierte Euler Bernoulli Balken mit einer festen Einspannung bei $x = 0$ und der Länge l. Unter Verwendung des Rayleigh-Quotienten soll eine Abschätzung für die erste Eigenkreisfrequenz der Biegeschwingung gemacht werden. Geben Sie eine zulässige Ansatzfunktion $\widetilde{W}_1(x)$ an



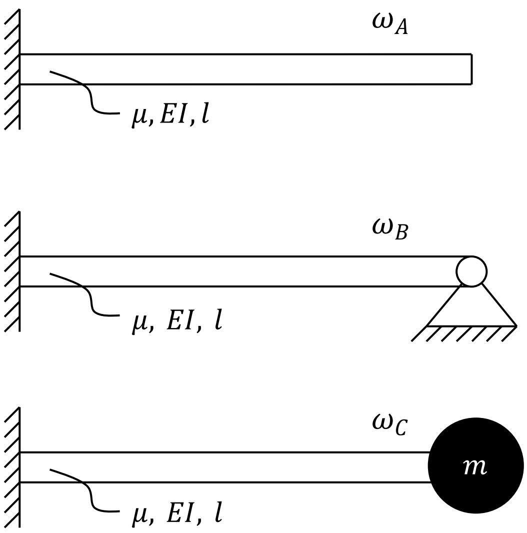
1 Punkt

z.B. $\widetilde{W}_1(x) = x^2,\ \widetilde{W}_1(x) = x^4,$ alles wenn gilt: $\widetilde{W}_1(0) = 0$ und $\widetilde{W}_1{}'(0) = 0$

Aufgabe T8

[1 Punkt]

Die drei skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich lediglich in ihren Randbedingungen. Die zu jedem System gehörende erste Eigenkreisfrequenz sei jeweils ω_A, ω_B bzw. ω_C. Sortieren Sie diese nach Ihrer Größe.



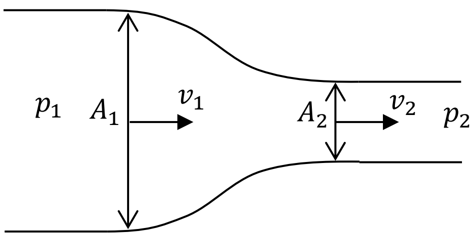
1 Punkt

ω_C < ω_A < ω_B

Aufgabe T6

[1 Punkt]

Eine ideale Flüssigkeit strömt durch ein Rohr mit variablem Querschnitt $A_1 > A_2$. Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.



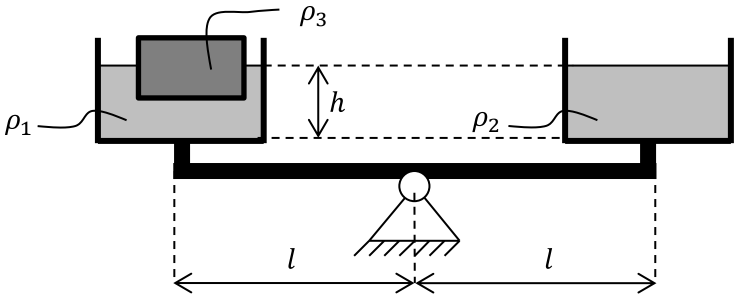
■ $v_1 < v_2$	☐ $v_1 > v_2$	☐ $v_1 = v_2$

1 Punkt

Aufgabe T7

[2 Punkte]

Die unten skizzierte Waage befindet sich im Gleichgewicht. Beide Behälter sind identisch und mit Flüssigkeiten (Dichte ρ_1 bzw. ρ_2) mit gleichem Füllstand h gefüllt. Im linken Behälter schwimmt zusätzlich ein Körper mit der Dichte ρ_3.



Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.

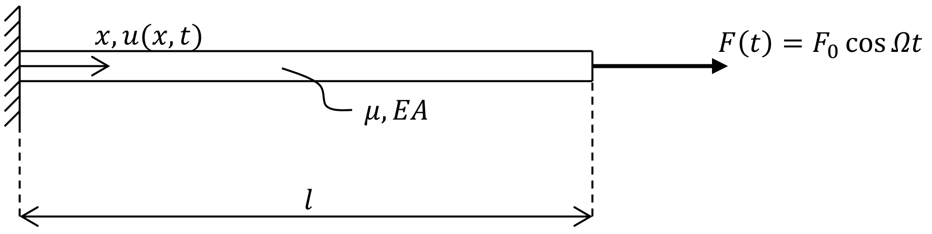
1 Punkt

☐ $\rho_1 < \rho_3$	■ $\rho_1 > \rho_3$	☐ $\rho_1 = \rho_3$
☐ $\rho_1 < \rho_2$	☐ $\rho_1 > \rho_2$	■ $\rho_1 = \rho_2$

1 Punkt

Aufgabe 1

[12 Punkte]



Gegeben ist der wie skizziert gelagerte Stab (Masse pro Länge $\mu = \rho A$, Dehnsteifigkeit EA, Länge l), der durch die Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ zu Längsschwingungen $u(x,t)$ angeregt wird.

Gegeben: $A, E, l, \rho, F_0, \Omega$

a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an (Herleitung ist nicht notwendig).

Ergebnis:

Feldgleichung: **1 Punkt**

$$\rho A \ddot{u}(x,t) - EAu''(x,t) = q(x,t) = 0$$

oder

$$\mu \ddot{u}(x,t) - EAu''(x,t) = q(x,t) = 0$$

Randbedingungen

RB1: $u(0,t) = 0$ **1 Punkt**

RB2: $EAu'(l,t) = F(t)$

b) Bestimmen Sie für $F(t) \equiv 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_k und die Eigenformen $U_k(x)$ des Stabs.

Rechnung:

Den Ansatz

$$u(x,t) = U(x)p(t)$$ **1 Punkt**

in die Feldgleichung eingesetzt führt zu

$$\ddot{p}(t) + \omega^2 p(t) = 0$$

$$U''(x) + \frac{\rho}{E}\omega^2 U(x) = 0.$$

Anpassen des Ansatzes

$$U(x) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega x\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\omega x\right)$$ **1 Punkt**

an die Randbedingung. Aus RB1 folgt

$$U(0) = 0$$

weshalb

$$A_1 = 0$$ **1 Punkt**

gilt.

Aus RB2 folgt mit $F(t) \equiv 0$

$$U'(l) = 0$$

weshalb

$$A_2 \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega l\right) = 0$$ **1 Punkt**

gilt. Für die nichttriviale Lösung muss damit gelten

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega l\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega_k l = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k-1)\frac{\pi}{2} \qquad k = 1, .., \infty$$

$$\Rightarrow \omega_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

1 Punkt	**1 Punkt**
$\omega_k = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$	$U_k(x) = \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \frac{1}{l} x\right) \qquad k = 1, .., \infty$

c) $F(t)$ sei nun mit $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ gegeben. Bestimmen Sie mit dem Ansatz $u(x,t) = U(x) \cos \Omega t$ eine Lösung für die Zwangsschwingungen.

Rechnung:

Ansatz einsetzen in die Feldgleichung

$$-\Omega^2 \rho A U(x) \cos \Omega t - EAU''(x) \cos \Omega t = 0$$

führt auf

$$U''(x) + \frac{\rho}{E}\Omega^2 U(x) = 0$$

1 Punkt

Anpassen der Lösung

$$U(x) = A_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega x\right) + A_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega x\right)$$

an die Randbedingungen.

Aus RB1 folgt

$$U(0) = 0$$

weshalb

$$A_1 = 0$$

gilt.

Aus RB2 $EAu'(l,t)$ folgt

$$EAU'(l) \cos \Omega t = F(t) = F_0 \cos \Omega t$$

$$\Rightarrow EAA_2 \sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega l\right) = F_0$$

1 Punkt

$$\Rightarrow A_2 = \frac{F_0}{\sqrt{E\rho}A\,\Omega \cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega l\right)}$$

$$u(x,t) = \frac{F_0}{\sqrt{E\rho A}\,\Omega\,\cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega l\right)}\sin\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega x\right)\cos\Omega t$$

1 Punkt

d) Für welche Erregerkreisfrequenzen Ω tritt Resonanz auf?

Rechnung:

$$\sqrt{E\rho A}\,\Omega\,\cos\left(\sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega l\right) = 0$$

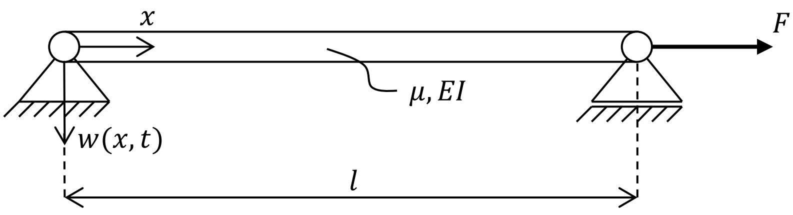
$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\rho}{E}}\Omega l = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad k = 1, 2, .., \infty$$

$$\Omega = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\frac{1}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}} = \omega_k$$

1 Punkt

Aufgabe 2

[8 Punkte]



Gegeben ist der skizzierte mit der Kraft F vorgespannte Balken (Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI, Länge l). Seine Feldgleichung ist

$$\mu\ddot{w}(x,t) + EIw^{IV}(x,t) - Fw^{II}(x,t) = 0$$

<u>Gegeben:</u> μ, EI, l, F

a) Geben Sie die Randbedingungen an.

Ergebnis:

$w(0,t) = 0$
$w''(0,t) = 0$

für zwei jeweils 1 Punkt

$w(l,t) = 0$
$w''(l,t) = 0$

für zwei jeweils 1 Punkt

b) Mit der Funktion $\tilde{W}_1(x) = \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)$ soll eine Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten bestimmt werden. Zeigen Sie, dass $\tilde{W}_1(x)$ eine zulässige Funktion ist.

Ergebnis:

Es muss gelten

$$\tilde{W}_1(0) = 0$$
$$\Rightarrow \sin\left(\pi \frac{0}{l}\right) = 0$$

1 Punkt

und

$$\tilde{W}_1(l) = 0$$
$$\Rightarrow \sin\left(\pi \frac{l}{l}\right) = 0$$

1 Punkt

c) Gegeben sei nun der Rayleigh-Quotient mit

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{\int_0^l \left(EI\tilde{W}_1''^2(x) + F\tilde{W}_1'^2(x)\right)\mathrm{d}x}{\int_0^l \mu\tilde{W}_1^2(x)\mathrm{d}x}.$$

Bestimmen Sie $\tilde{\omega}_1$ unter Verwendung der Ansatzfunktion $\tilde{W}_1(x) = \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)$.

Hinweis:

1) $\int \sin^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)) = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$
2) $\int \cos^2(\alpha)\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \sin(\alpha)\cos(\alpha)) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$

Rechnung:

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{\int_0^l \left(EI\frac{\pi^4}{l^4}\sin^2\left(\pi\frac{x}{l}\right) + F\frac{\pi^2}{l^2}\cos^2\left(\pi\frac{x}{l}\right)\right)\mathrm{d}x}{\int_0^l \mu\sin^2\left(\pi\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x}$$

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{EI\frac{\pi^4}{l^4}\int_0^l \sin^2\left(\pi\frac{x}{l}\right)dx + F\frac{\pi^2}{l^2}\int_0^l \cos^2\left(\pi\frac{x}{l}\right)dx}{\mu\int_0^l \sin^2\left(\pi\frac{x}{l}\right)\mathrm{d}x}$$

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{EI\frac{\pi^4}{l^4}\frac{1}{2}\left(\pi\frac{x}{l} - \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right)\right)\Big]_0^l + F\frac{\pi^2}{l^2}\frac{1}{2}\left(\pi\frac{x}{l} + \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right)\right)\Big]_0^l}{\mu\frac{1}{2}\left(\pi\frac{x}{l} - \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right)\cos\left(\pi\frac{x}{l}\right)\right)\Big]_0^l}$$ **1 Punkt**

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{EI\frac{\pi^4}{l^4} + F\frac{\pi^2}{l^2}}{\mu}$$

Anmerkung: Da $\tilde{W}_1(x)$ die erste Eigenform ist, ist $\tilde{\omega}_1$ exakt die erste Eigenkreisfrequenz ω_1

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{EI\frac{\pi^4}{l^4} + F\frac{\pi^2}{l^2}}{\mu}}$$ **1 Punkt**

d) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus c) die zugehörige Knicklast $\tilde{F}_{\mathrm{krit}}$.

Rechnung:

1 Punkt

$$\tilde{\omega}_1 = \sqrt{\frac{EI\frac{\pi^4}{l^4} + \tilde{F}_{\mathrm{krit}}\frac{\pi^2}{l^2}}{\mu}} = 0$$

$$EI\frac{\pi^4}{l^4} + \tilde{F}_{\mathrm{krit}}\frac{\pi^2}{l^2} = 0$$

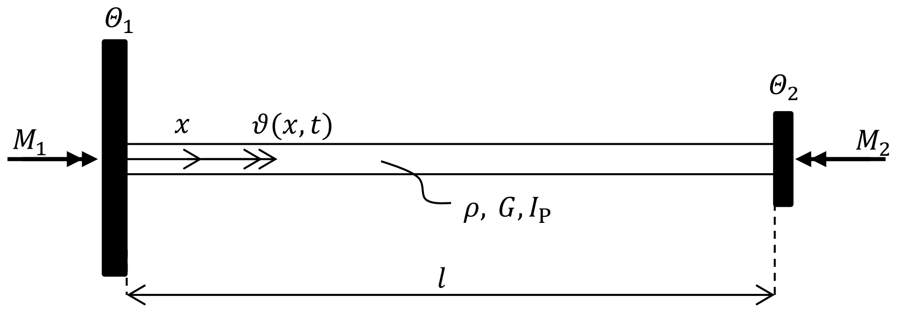
$$\tilde{F}_{\mathrm{krit}} = -EI\frac{\pi^2}{l^2}$$

1 Punkt

$$\tilde{F}_{\mathrm{krit}} = -EI\frac{\pi^2}{l^2}$$

Aufgabe 3

[9 Punkte]



Das skizzierte Modell eines Antriebsstrangs besteht aus zwei diskreten Drehmassen (starre Körper, Massenträgheitsmoment Θ_1 bzw. Θ_2 bezüglich der Drehachse) sowie dem dargestellten Torsionsstab (Dichte ρ, Schubmodul G, polares Flächenträgheitsmoment I_P, Länge l). Er wird bei $x = 0$ mit dem Moment M_1 und bei $x = l$ mit dem Moment M_2 belastet. Mit dem **Prinzip von Hamilton** sollen die Feldgleichung sowie die dynamischen Randbedingungen bestimmt werden.

<u>Gegeben:</u> $\rho, G, I_\mathrm{P}, l, M_1, M_2, \Theta_1, \Theta_2,$

a) Geben Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie U des Systems an.

<u>Hinweis:</u> Für einen starren Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Massenträgheitsmoment Θ bezüglich der Drehachse ist die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$.

$$T = \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^l \rho I_\mathrm{P} \dot{\vartheta}^2(x,t)\,\mathrm{d}x}_{\boxed{\text{1 Punkte}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\Theta_1\dot{\vartheta}^2(0,t) + \frac{1}{2}\Theta_2\dot{\vartheta}^2(l,t)}_{\boxed{\text{1 Punkte}}}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l G I_\mathrm{P} \vartheta'^2(x,t)\,\mathrm{d}x \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

b) Formulieren Sie die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente.

$$\delta W = M_1 \delta\,\vartheta(0,t) - M_2 \delta\,\vartheta(l,t) \qquad \boxed{\text{1 Punkt}}$$

c) Existieren geometrische Randbedingungen? Wenn ja, geben Sie diese an.

Ergebnis:

nein $\boxed{\text{1 Punkt}}$

d) Bestimmen Sie mit dem **Prinzip von Hamilton** die Feldgleichung sowie die dynamische(n) Randbedingung(en).

Rechnung:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} \delta W \mathrm{d}t = 0$$

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^l \rho I_{\mathrm{P}} \dot{\vartheta}(x,t) \delta\dot{\vartheta}(x,t) - G I_{\mathrm{P}} \vartheta'(x,t) \delta\vartheta'(x,t) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left(\Theta_1 \dot{\vartheta}(0,t) \delta\dot{\vartheta}(0,t) + \Theta_2 \dot{\vartheta}(0,t) \delta\dot{\vartheta}(l,t) \right) \mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left(M_1 \delta\vartheta(0,t) - M_2 \delta\vartheta(l,t) \right) \mathrm{d}t = 0$$

1 Punkt

Durch Partielle Integration

$$\int_{t_0}^{t_1} -G I_{\mathrm{P}} \vartheta'(x,t) \delta\vartheta(x,t) \mathrm{d}t \Big]_0^l - \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^l \rho I_{\mathrm{P}} \ddot{\vartheta}(x,t) \delta\vartheta(x,t) - G I_{\mathrm{P}} \vartheta''(x,t) \delta\vartheta(x,t) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \left(\Theta_1 \ddot{\vartheta}(0,t) \delta\vartheta(0,t) + \Theta_2 \ddot{\vartheta}(0,t) \delta\vartheta(l,t) \right) \mathrm{d}t$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left(M_1 \delta\vartheta(0,t) - M_2 \delta\vartheta(l,t) \right) \mathrm{d}t = 0$$

1 Punkt

$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \left[-G I_{\mathrm{P}} \vartheta'(l,t) - \Theta_2 \ddot{\vartheta}(0,t) - M_2 \right] \delta\vartheta(l,t) + \left[G I_{\mathrm{P}} \vartheta'(0,t) - \Theta_1 \ddot{\vartheta}(0,t) + M_1 \right] \delta\vartheta(0,t) \mathrm{d}t$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^l \left[\rho I_{\mathrm{P}} \ddot{\vartheta}(x,t) \delta\vartheta(x,t) - G I_{\mathrm{P}} \vartheta''(x,t) \delta\vartheta(x,t) \right] \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t = 0$$

Rechnung:

Rechnung:

Feldgleichung:

1 Punkt

$$\rho I_\mathrm{P}\ddot{\vartheta}(x,t) - GI_\mathrm{P}\vartheta''(x,t) = 0$$

dynamische Randbedingung(en):

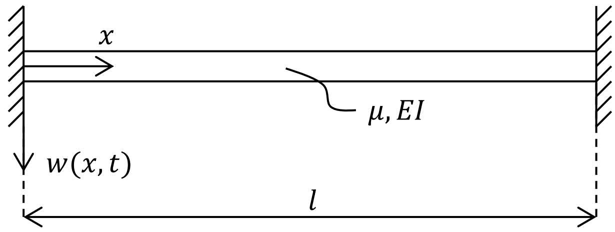
1 Punkt

$$GI_\mathrm{P}\vartheta'(0,t) - \Theta_1\ddot{\vartheta}(0,t) + M_1 = 0$$

$$-GI_\mathrm{P}\vartheta'(l,t) - \Theta_2\ddot{\vartheta}(l,t) - M_2 = 0$$

Aufgabe 4

[11 Punkte]



Gegeben ist der skizzierte, beidseitig fest eingespannte Euler-Bernoulli-Balken (Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI, Länge l)

<u>Gegeben:</u> μ, EI, l

a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

Feldgleichung:

$$\mu\ddot{w}(x,t) + EIw^{IV}(x,t) = 0$$

1 Punkt

Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0$$
$$w'(0,t) = 0$$

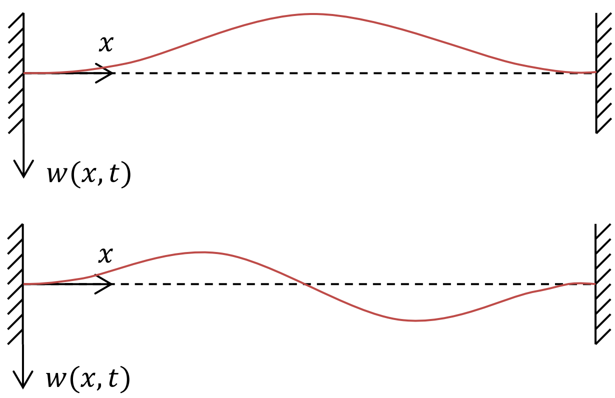
für zwei jeweils 1 Punkt

$$w(l,t) = 0$$
$$w'(l,t) = 0$$

für zwei jeweils 1 Punkt

b) Skizzieren Sie die zwei Eigenformen, die zu den beiden niedrigsten Eigenkreisfrequenzen gehören (ohne Rechnung).

Skizze:



1 Punkt

c) Setzen Sie den Ansatz $w(x,t) = W(x)\sin(\omega t)$ in die Feldgleichungen, und bestimmen Sie die Differentialgleichung für $W(x)$.

Rechnung:

$$\mu\ddot{w}(x,t) + EIw^{IV}(x,t) = 0$$

$$-\omega^2\mu W(x)\sin(\omega t) + EIW^{IV}(x)\sin(\omega t) = 0$$

$$W^{IV}(x) - \omega^2\frac{\mu}{EI}W(x) = 0$$

Differentialgleichung:

$$W^{IV}(x) - \omega^2\frac{\mu}{EI}W(x) = 0$$

1 Punkt

d) Geben Sie die allgemeine Lösung für $W(x)$ an. Verwenden Sie dabei die Abkürzung $\lambda^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI}$

$$W(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + C\cosh(\lambda x) + D\sinh(\lambda x)$$

1 Punkt

e) Berechnen Sie die Charakteristische Gleichung für die Bestimmung von λ durch Anpassen der allgemeinen Lösung an die Randbedingungen.
Hinweise:
1) $1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$
   $1 = \cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha)$
2) Ein lineares Gleichungssystem der Form $\underline{A}\vec{r} = \vec{0}$ hat dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante von $\underline{A}$ Null ist.

Rechnung:

$$W(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x) + C\cosh(\lambda x) + D\sinh(\lambda x)$$

Anpassen an die Randbedingungen:

$$w(0,t) = 0 \ \rightarrow W(0) = 0 \ \rightarrow A + C = 0 \rightarrow C = -A$$

$$w'^{(0,t)} = 0 \rightarrow W'(0) = 0 \ \rightarrow B + D = 0 \rightarrow D = -B$$

1 Punkt

$$w(l,t) = 0 \rightarrow W(l) = 0$$

$$w'(l,t) = 0 \rightarrow W'(l) = 0$$

Aus $W(l) = 0$ folgt

$$A\cos(\lambda l) + B\sin(\lambda l) - A\cosh(\lambda l) - B\sinh(\lambda l) = 0.$$

1 Punkt

Aus $W'(l) = 0$ folgt

$$-A\sin(\lambda l) + B\cos(\lambda l) - A\sinh(\lambda l) - B\cosh(\lambda l) = 0.$$

1 Punkt

In Matrixschreibweise $\underline{A}\vec{r} = \vec{0}$

$$\begin{bmatrix} \cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l) & \sin(\lambda l) - \sinh(\lambda l) \\ -\sin(\lambda l) - \sinh(\lambda l) & \cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bestimmung der Determinanten von $\underline{A}$

$$\det(\underline{A}) = (\cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l))(\cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l)) - (-\sin(\lambda l) - \sinh(\lambda l))(\sin(\lambda l) - \sinh(\lambda l))$$

1 Punkt

$$\det(\underline{A}) = \cos^2(\lambda l) - 2\cos(\lambda l)\cosh(\lambda l) + \cosh^2(\lambda l) + \sin^2(\lambda l) - \sinh^2(\lambda l)$$

$$\det(\underline{A}) = -2\cos(\lambda l)\cosh(\lambda l) + 2$$

Charakteristische Gleichung:

$$-2\cos(\lambda l)\cosh(\lambda l) + 2 = 0$$

1 Punkt

MMD Mechatronische Maschinendynamik Prof. Dr.-Ing. Utz v. Wagner	Kontinuumsmechanik Sommersemester 2017

Klausur vom 28.07.2017

Name

Vorname

Studiengang

Matrikelnummer

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Ich bestätige meine Prüfungsfähigkeit.

Unterschrift

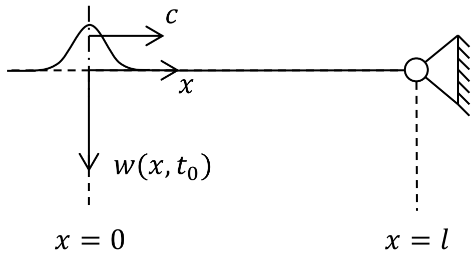
Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

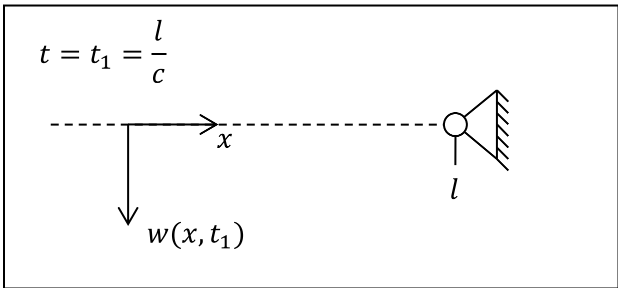
Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte						
Erreichte Punkte						
Handzeichen						

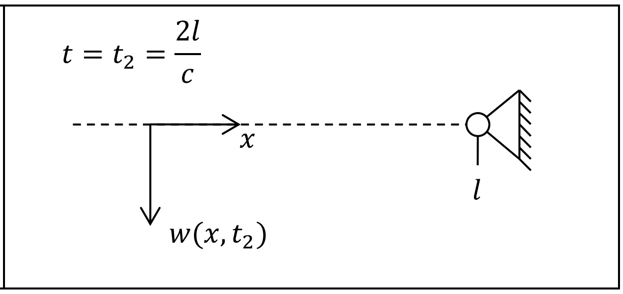
Theorieaufgaben [10 Punkte]

Aufgabe T1 [2 Punkte]

In einer Saite läuft die skizzierte Transversalwelle mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c auf das Lager bei $x = l$ zu. Ihr Maximum ist zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ bei $x = 0$. Skizzieren Sie in den beiden unteren Diagrammen die Verschiebungen $w(x, t_1)$ mit $t_1 = \frac{l}{c}$ bzw. $w(x, t_2)$ mit $t_2 = \frac{2l}{c}$.







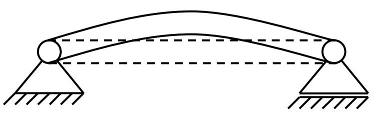
Aufgabe T2 [1 Punkt]

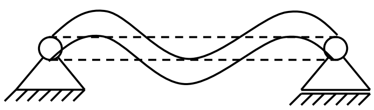
Die eindimensionale Wellengleichung $\ddot{w}(x, t) - c^2 w''(x, t) = 0$ besitzt die Lösung $w(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$. Was beschreibt der Ausdruck $f_2(x + ct)$ dabei anschaulich? Kreuzen Sie alle richtigen Antworten an.

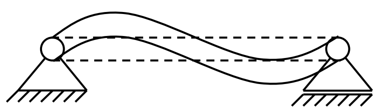
- ☐ eine mit der Geschwindigkeit c in negative x-Richtung laufende Welle
- ☐ eine mit der Geschwindigkeit c in positive x-Richtung laufende Welle
- ☐ eine Schwingung mit steigender Amplitude
- ☐ eine Schwingung mit fallender Amplitude

Aufgabe T3 [1 Punkt]

Der skizzierte Balken besitzt die niedrigsten drei Eigenfrequenzen 100 Hz, 400 Hz und 900 Hz. Ordnen Sie die jeweiligen Eigenfrequenzen den unten abgebildeten Schwingformen zu.





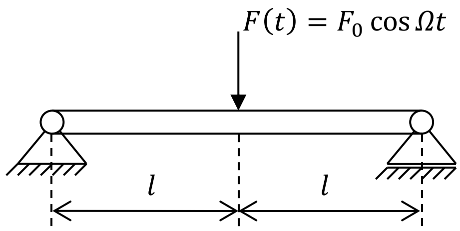


$f =$	$f =$	$f =$

Aufgabe T4

[1 Punkt]

Gegeben ist der rechts skizzierte statisch bestimmt gelagerte homogene Euler-Bernoulli-Balken mit konstantem Querschnitt, welcher mittig mit der Einzellast $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ zu Schwingungen angeregt wird. Kreuzen Sie alle wahren Aussagen an.

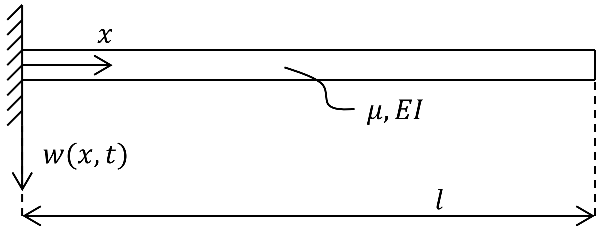


☐	Wenn die Erregerkreisfrequenz Ω gleich der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 ist, tritt Resonanz auf.
☐	Wenn die Erregerkreisfrequenz Ω gleich der zweiten Eigenkreisfrequenz ω_2 ist, tritt Resonanz auf.
☐	eine Erhöhung der Amplitude F_0 führt zu einer Erhöhung der Eigenkreisfrequenz ω_1
☐	eine Erhöhung der Amplitude F_0 führt zu einer Verringerung der Eigenkreisfrequenz ω_1

Aufgabe T5

[1 Punkt]

Gegeben ist der skizzierte Euler Bernoulli Balken mit einer festen Einspannung bei $x = 0$ und der Länge l. Unter Verwendung des Rayleigh-Quotienten soll eine Abschätzung für die erste Eigenkreisfrequenz der Biegeschwingung gemacht werden. Geben Sie eine zulässige Ansatzfunktion $\widetilde{W}_1(x)$ an

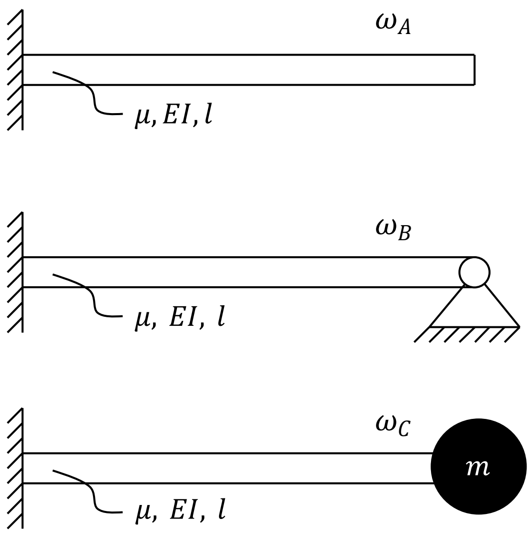


$\widetilde{W}_1(x) =$

Aufgabe T6

[1 Punkt]

Die drei skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich lediglich in ihren Randbedingungen. Die zu jedem System gehörende erste Eigenkreisfrequenz sei jeweils ω_A, ω_B bzw. ω_C. Sortieren Sie diese nach Ihrer Größe.

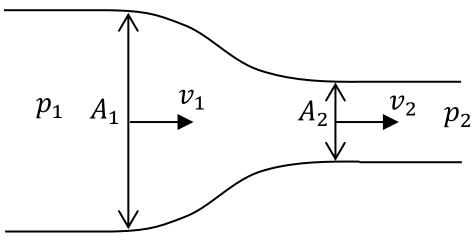


☐ < ☐ < ☐

Aufgabe T7

[1 Punkt]

Eine ideale Flüssigkeit strömt durch ein Rohr mit variablem Querschnitt $A_1 > A_2$. Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.

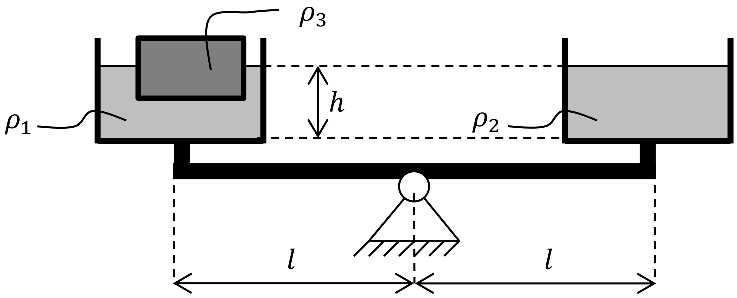


☐ $v_1 < v_2$	☐ $v_1 > v_2$	☐ $v_1 = v_2$

Aufgabe T8

[2 Punkte]

Die unten skizzierte Waage befindet sich im Gleichgewicht. Beide Behälter sind identisch und mit Flüssigkeiten (Dichte ρ_1 bzw. ρ_2) mit gleichem Füllstand h gefüllt. Im linken Behälter schwimmt zusätzlich ein Körper mit der Dichte ρ_3.

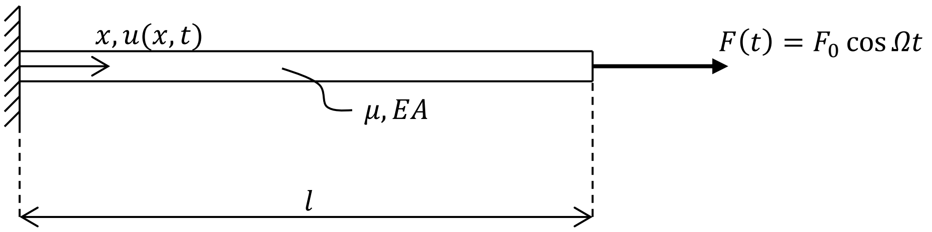


Kreuzen Sie alle richtigen Aussagen an.

☐ $\rho_1 < \rho_3$	☐ $\rho_1 > \rho_3$	☐ $\rho_1 = \rho_3$
☐ $\rho_1 < \rho_2$	☐ $\rho_1 > \rho_2$	☐ $\rho_1 = \rho_2$

Aufgabe 1

[12 Punkte]



Gegeben ist der wie skizziert gelagerte Stab (Masse pro Länge $\mu = \rho A$, Dehnsteifigkeit EA, Länge l), der durch die Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ zu Längsschwingungen $u(x,t)$ angeregt wird.

Gegeben: $A, E, l, \rho, F_0, \Omega$

a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an (Herleitung ist nicht notwendig).

Ergebnis:

b) Bestimmen Sie für $F(t) \equiv 0$ die Eigenkreisfrequenzen ω_k und die Eigenformen $U_k(x)$ des Stabs.

Rechnung:

$\omega_k =$	$U_k(x) =$

c) $F(t)$ sei nun mit $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ gegeben. Bestimmen Sie mit dem Ansatz $u_\mathrm{p}(x,t) = U_\mathrm{p}(x) \cos \Omega t$ eine Lösung für die Zwangsschwingungen.

Rechnung:

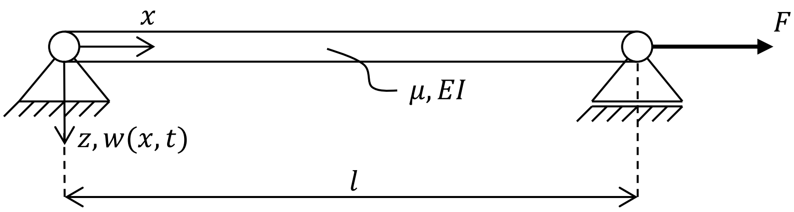
$u_{\mathrm{p}}(x,t) =$

d) Für welche Erregerkreisfrequenzen Ω tritt Resonanz auf?

Rechnung:
$\Omega =$

Aufgabe 2

[8 Punkte]



Gegeben ist der skizzierte mit der Kraft F vorgespannte Balken (Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI, Länge l). Seine Feldgleichung ist

$$\mu\ddot{w}(x,t) + EIw^{IV}(x,t) - Fw^{II}(x,t) = 0$$

Gegeben: μ, EI, l, F

a) Geben Sie die Randbedingungen an.

Ergebnis:

b) Mit der Funktion $\widetilde{W}_1(x) = \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)$ soll eine Näherung für die erste Eigenkreisfrequenz mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten bestimmt werden. Zeigen Sie, dass $\widetilde{W}_1(x)$ eine zulässige Funktion ist.

Ergebnis:

c) Gegeben sei nun der Rayleigh-Quotient mit

$$\tilde{\omega}_1{}^2 = \frac{\int_0^l \left(EI\widetilde{W}_1''^2(x) + F\widetilde{W}_1'^2(x)\right) \mathrm{d}x}{\int_0^l \mu \widetilde{W}_1^2(x) \mathrm{d}x}.$$

Bestimmen Sie $\tilde{\omega}_1$ unter Verwendung der Ansatzfunktion $\widetilde{W}_1(x) = \sin\left(\pi \frac{x}{l}\right)$.

Hinweis:

1) $\int \sin^2(\alpha) \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha - \sin(\alpha)\cos(\alpha)) = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$
2) $\int \cos^2(\alpha) \mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \sin(\alpha)\cos(\alpha)) = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{2}\sin(2\alpha)\right)$

Rechnung:

$\tilde{\omega}_1 =$

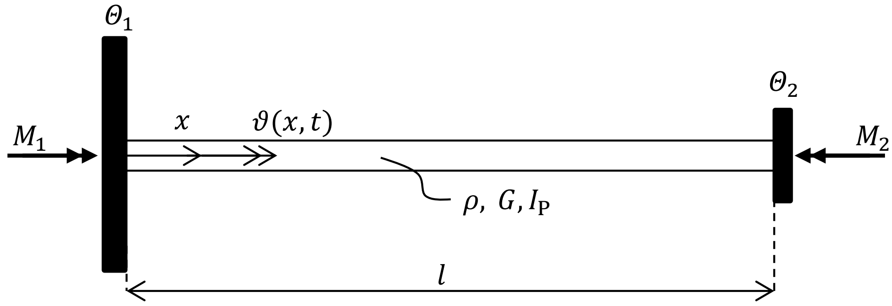
d) Bestimmen Sie mit dem Ergebnis aus c) die zugehörige Knicklast $\tilde{F}_{\mathrm{krit}}$.

Rechnung:

$\tilde{F}_{\mathrm{krit}} =$

Aufgabe 3

[9 Punkte]



Das skizzierte Modell eines Antriebsstrangs besteht aus zwei diskreten Drehmassen (starre Körper, Massenträgheitsmoment Θ_1 bzw. Θ_2 bezüglich der Drehachse) sowie dem dargestellten Torsionsstab (Dichte ρ, Schubmodul G, polares Flächenträgheitsmoment I_P, Länge l). Er wird bei $x = 0$ mit dem Moment M_1 und bei $x = l$ mit dem Moment M_2 belastet. Mit dem **Prinzip von Hamilton** sollen die Feldgleichung sowie die dynamischen Randbedingungen bestimmt werden.

Gegeben: $\rho, G, I_\mathrm{P}, l, M_1, M_2, \Theta_1, \Theta_2,$

a) Geben Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie U des Systems an.

Hinweis: Für einen starren Körper mit der Winkelgeschwindigkeit ω und dem Massenträgheitsmoment Θ bezüglich der Drehachse ist die kinetische Energie $T = \frac{1}{2}\Theta\omega^2$.

$T =$
$U =$

b) Formulieren Sie die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräfte und Momente.

$\delta W =$

c) Existieren geometrische Randbedingungen? Wenn ja, geben Sie diese an.

Ergebnis:

d) Bestimmen Sie mit dem **Prinzip von Hamilton** die Feldgleichung sowie die dynamische(n) Randbedingung(en).

Rechnung:

Rechnung:

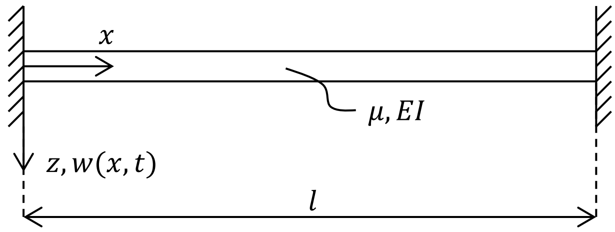
Rechnung:

Feldgleichung:

dynamische Randbedingung(en):

Aufgabe 4

[11 Punkte]



Gegeben ist der skizzierte, beidseitig fest eingespannte Euler-Bernoulli-Balken (Masse pro Länge μ, Biegesteifigkeit EI, Länge l)

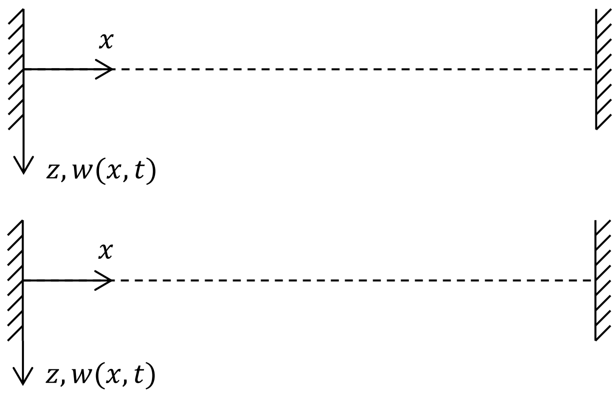
<u>Gegeben:</u> μ, EI, l

a) Geben Sie die Feldgleichung und die Randbedingungen an.

Feldgleichung:
Randbedingungen:

b) Skizzieren Sie die zwei Eigenformen, die zu den beiden niedrigsten Eigenkreisfrequenzen gehören (ohne Rechnung).

Skizze:



c) Setzen Sie den Ansatz $w(x,t) = W(x)\sin(\omega t)$ in die Feldgleichung ein, und bestimmen Sie die Differentialgleichung für $W(x)$.

Rechnung:
Differentialgleichung:

d) Geben Sie die allgemeine Lösung für $W(x)$ an. Verwenden Sie dabei die Abkürzung $\lambda^4 = \frac{\mu\omega^2}{EI}$

$W(x) =$

e) Berechnen Sie die Charakteristische Gleichung für die Bestimmung von λ durch Anpassen der allgemeinen Lösung an die Randbedingungen.

Hinweise:

1) $1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)$
   $1 = \cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha)$
2) Ein lineares Gleichungssystem der Form $\underline{A}\vec{r} = \vec{0}$ hat dann nichttriviale Lösungen, wenn die Determinante von $\underline{A}$ Null ist.

Rechnung:

Rechnung:

Charakteristische Gleichung: