Probeklausur vom 15.07.2011

Name, Vorname

Matrikelnummer

Studiengang

Es ist erlaubt, eine handgeschriebene Formelsammlung im Umfang eines einseitig beschriebenen DIN A4-Blattes zu benutzen. Andere Hilfsmittel sind nicht erlaubt. Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass keinerlei elektronische Hilfsmittel benutzt werden dürfen. Hierzu zählen insbesondere Taschenrechner, Laptops und Handys.

Tragen Sie Nebenrechnungen und die Endergebnisse ausschließlich in die dafür vorgesehenen Kästen ein. Separat abgegebene Blätter werden nicht bewertet.

Aufgabe	T	A1	A2	A3	A4	$\sum$
Punkte	10	16	10	9	5	50
erreichte Punkte						
Handzeichen						

Theorieaufgaben [10 Punkte]

Aufgabe T1 [2 Punkte]

Die Lösung der eindimensionalen Wellengleichung nach d'Alembert hat die Gestalt

$$w(x,t) = \frac{1}{2}\hat{w}\left[\sin\left(\frac{\pi(x-ct)}{2l}\right) + \sin\left(\frac{\pi(x+ct)}{2l}\right)\right].$$

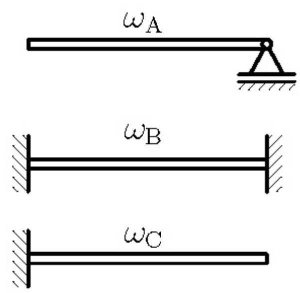
Wie lauten die dazugehörigen Anfangsbedingungen?

$w_0(x) =$ $\hat{w}\sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$

$\dot{w}_0(x) =$ 0

Aufgabe T2 [2 Punkte]

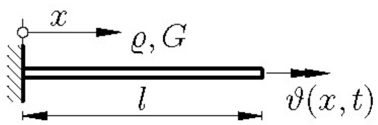
Die drei skizzierten Euler-Bernoulli-Balken unterscheiden sich nur in der Art ihrer Lagerung. Die jeweils erste Eigenkreisfrequenz der Systeme ist $\omega_{A,B,C}$. Ordnen Sie die Frequenzen der Größe nach.



ω_A < ω_C < ω_B

Aufgabe T3 [1 Punkt]

Wie lautet die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit für den skizzierten Torsionsstab (Länge l, Dichte ϱ, Schubmodul G) ?



$c =$ $\sqrt{\frac{G}{\varrho}}$

Aufgabe T4 [2 Punkte]

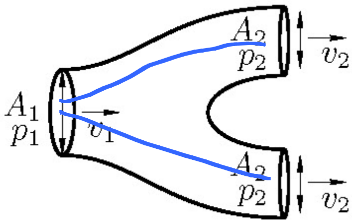
Für einen Biegebalken sei $W_2(x)$ die Funktion der zweiten Eigenform. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- [ ] Der Rayleigh-Quotient $R[W_2(x)]$ ist gleich dem Quadrat der ersten Eigenkreisfrequenz.
- [ ] Der Rayleigh-Quotient $R[W_2(x)]$ ist unabhängig von der Biegesteifigkeit EI des Balkens.
- [x] Der Rayleigh-Quotient $R[W_2(x)]$ ist größer als das Quadrat der ersten Eigenkreisfrequenz.

Aufgabe T5

[2 Punkte]

Eine ideale Flüssigkeit (Dichte ϱ) strömt durch das skizzierte sich verzweigende Rohr. Wie groß muß die Geschwindigkeit v_1 und das Verhältinis der Querschnittsflächen $\frac{A_2}{A_1}$ sein, damit sich am Eingang der Druck p_1 und an den Ausgängen jeweils der Druck p_2 und die Austrittsgeschwindigkeit v_2 einstellt? .



Gegeben: v_2, p_1, p_2, ρ

Nebenrechnung:

$$\frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2$$

$$v_1 A_1 = 2 A_2 v_2$$

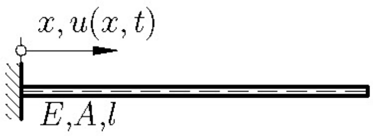
$$v_1 = \sqrt{\frac{2}{\varrho}\left(\frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2 - p_1\right)}$$

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{v_1}{2 v_2} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\varrho}\left(\frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2 - p_1\right)}}{2 v_2}$$

Aufgabe T6

[1 Punkt]

Gegeben sei skizzierter Stab (E-Modul E, Querschnittsfläche A, Länge l) der nur Längsschwingungen durchführen kann.
Nennen Sie alle dynamischen Randbedingungen.



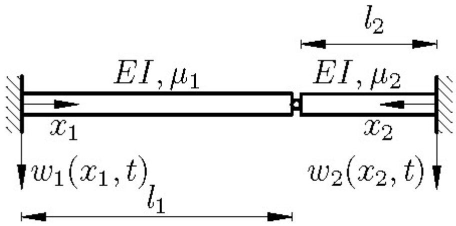
$$EAu'(l,t) = 0$$

Aufgabe 1

[16 Punkte]

Das skizzierte System besteht aus zwei homogenen Balken (Biegesteifigkeit EI, Massenbelegung μ_1 bzw. μ_2, Länge l_1 bzw. l_2, schlank und dehnstarr), die über ein Gelenk verbunden sind.

Gegeben: EI, μ_1, μ_2, l_1, l_2



a) Geben Sie die Bewegungsgleichungen (Feldgleichungen) für die beiden Balken in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

Bewegungsgleichungen:

linker Balken: $\mu_1 \ddot{w}_1(x_1,t) + EI\, w_1^{IV}(x_1,t) = 0$

rechter Balken: $\mu_2 \ddot{w}_2(x_2,t) + EI\, w_2^{IV}(x_2,t) = 0$

b) Geben Sie alle Rand- und Übergangsbedingungen des Systems an. (Hinweis: Zeichnen Sie ggf. ein Freikörperbild.)

Nebenrechnung, ggf. Freikörperbild: (8)

$Q_1 = -Q_2$

$Q_1 = -EI\, w_1'''(l_1,t)$

$Q_2 = -EI\, w_2'''(l_2,t)$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$w_1(0,t) = 0$ $\quad$ $w_2(0,t) = 0$

$w_1'(0,t) = 0$ $\quad$ $w_2'(0,t) = 0$

$EI\, w_1''(l_1,t) = 0$ $\quad$ $EI\, w_2''(l_2,t) = 0$

$w_1(l_1,t) = w_2(l_2,t)$

$EI\, w_1'''(l_1 t) + EI\, w_2'''(l_2,t) = 0$

c) Die erste Eigenkreisfrequenz ω_1 soll mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten abgeschätzt werden. Welche Bedingungen müssen die Ansatzfunktionen $W_1(x_1)$ und $W_2(x_2)$ erfüllen?

Bedingungen für $W_1(x_1)$ und $W_2(x_2)$:

$\tilde{W}_1(0) = 0 \quad \tilde{W}_2(0) = 0 \quad \tilde{W}_1'(0) = 0 \quad \tilde{W}_2'(0) = 0$

$\tilde{W}_1(l_1) = \tilde{W}_2(l_2)$

d) Wie lautet der Rayleigh-Quotient $R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$ des Systems? Drücken Sie das Ergebnis nur in den gegebenen Größen sowie $W_1(x_1)$ und $W_2(x_2)$ aus.

Nebenrechnung:

$$T[\dot{w}_1(x_1,t), \dot{w}_2(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \mu_1 \dot{w}_1^2(x_1,t)\,dx_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} \mu_2 \dot{w}_2^2(x_2,t)\,dx_2$$

$$U[w_1(x_1,t), w_2(x_2,t)] = \frac{1}{2}\int_0^{l_1} EI\, w_1''^2(x_1,t)\,dx_1 + \frac{1}{2}\int_0^{l_2} EI\, w_2''^2(x_2,t)\,dx_2$$

$$R[\tilde{W}_1(x_1), \tilde{W}_2(x_2)] = \frac{U[\tilde{W}_1(x_1), \tilde{W}_2(x_2)]}{T[\tilde{W}_1(x_1), \tilde{W}_2(x_2)]}$$

$$R[W_1(x_1), W_2(x_2)] = \frac{\int_0^{l_1} EI\, \tilde{W}_1''^2(x_1)\,dx_1 + \int_0^{l_2} EI\, \tilde{W}_2''^2(x_2)\,dx_2}{\int_0^{l_1} \mu_1 \tilde{W}_1^2(x_1)\,dx_1 + \int_0^{l_2} \mu_2 \tilde{W}_2^2(x_2)\,dx_2}$$

e) Tragen Sie das richtige Vergleichssymbol ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $=$) bezüglich des Rayleigh-Quotienten $R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$ und der ersten Eigenkreisfrequenz ω_1 ein, wenn

- $W_1(x_1)$, und $W_2(x_2)$ die unter c) gefragten Bedingungen erfüllen:

  $\omega_1^2 \leq R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$

- $W_1(x_1)$, und $W_2(x_2)$ die ersten Eigenformen des jeweiligen Systems sind:

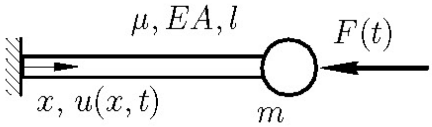
  $\omega_1^2 = R[W_1(x_1), W_2(x_2)]$

Aufgabe 2

[10 Punkte]

Der skizzierte Stab (μ, EA, l) ist links fest eingespannt und kann nur Längsschwingungen ausführen. Am rechten Ende ist eine Einzelmasse m besfestigt. Ausserdem greift eine Einzellast $F(t)$ an.

Gegeben: μ, EA, l, m, $F(t)$



a) Geben Sie die kinetische Energie T des Systems an.

Nebenrechnung:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l \mu \dot{u}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2} m \dot{u}^2(l,t)$$

b) Geben Sie die potentielle Energie U des Systems an.

Nebenrechnung:

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l EA\, u'^2(x,t)\,dx$$

c) Geben Sie die virtuelle Arbeit δW der nicht in U berücksichtigten Kräfte an. Gibt es potentiallose Kräfte in diesem System?

Nebenrechnung:

$$\delta W = -F(t)\,\delta u(l,t)$$

Gibt es potentiallose Kräfte? Ja ☐ Nein ☒

d) Geben Sie alle geometrischen Randbedingungen an.

geometrische Randbedingungen:

$u(0,t) = 0$

e) Nach Ausführen der Variation und partieller Integration liefert das Prinzip von Hamilton für das gegebene System den Ausdruck

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^l \Big(-\mu \ddot{u}(x,t) + EAu''(x,t)\Big)\delta u(x,t)\, \mathrm{d}x + \Big(-F(t) - m\ddot{u}(l,t)\Big)\delta u(l,t) \right.$$
$$\left. - \Big[EAu'(x,t)\delta u(x,t)\Big]_{0}^{l} \right\} \mathrm{d}t + \underbrace{\left[\int_0^l \mu \dot{u}(x,t)\delta u(x,t)\mathrm{d}x + m\dot{u}(x,t)\delta u(l,t)\right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} = 0.$$

$= 0$

Geben Sie damit die Bewegungsgleichung (Feldgleichung) des Systems und alle natürlichen (dynamischen) Randbedingungen an.

Bewegungsgleichung:

$\mu \ddot{u}(x,t) - EAu''(x,t) = 0$

natürliche Randbedingung(en):

$-F(t) - m\ddot{u}(l,t) - EAu'(l,t) = 0$

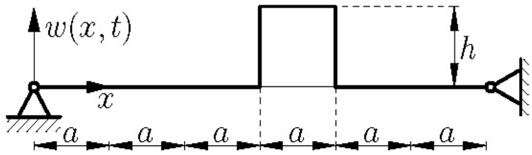
f) Es sei nun $F(t) = \hat{F}\cos\Omega t$. Kreuzen Sie die richtige(n) Aussage(n) an.

- [ ] Ein Ansatz der Form $u_p(x,t) = U(x)\sin\Omega t$ würde auf die partikuläre Lösung führen.
- [x] Ein Ansatz der Form $u_p(x,t) = U(x)\cos\Omega t$ würde auf die partikuläre Lösung führen.
- [ ] Das Prinzip von Hamilton liefert nur für harmonische Funktionen $F(t)$ die korrekte Feldgleichung.

Aufgabe 3

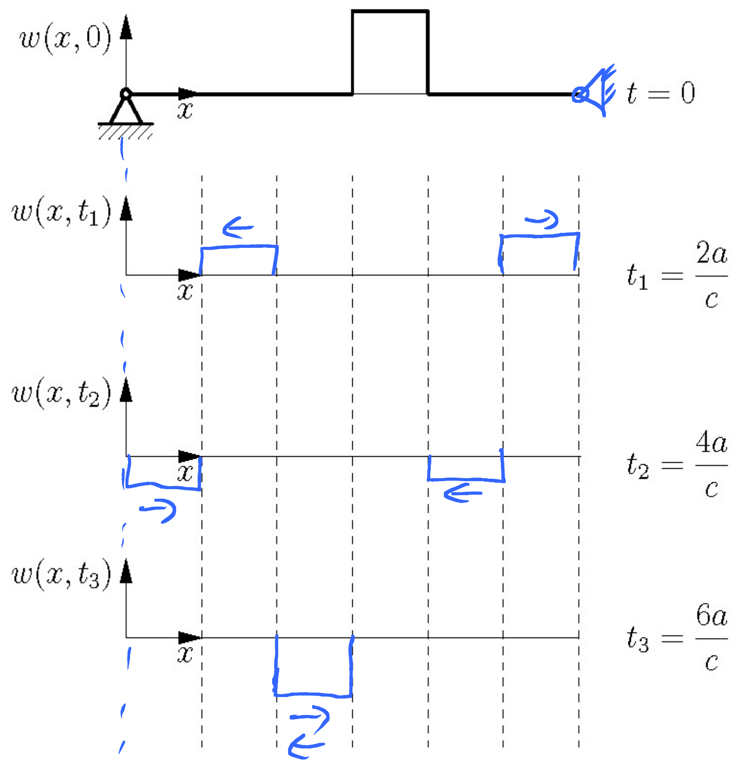
[9 Punkte]

Die fest-fest gelagerte Saite (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c, Länge $6a$) hat die skizzierte Anfangsauslenkung und keine Anfangsgeschwindigkeit ($\dot{w}(x,0)=0$).



Gegeben: c, a

a) Vervollständigen Sie das Bild, indem Sie die Auslenkung der Saite zu den Zeitpunkten $t_1=2a/c$, $t_2=4a/c$, $t_3=6a/c$ einzeichnen. Kennzeichnen Sie die Laufrichtung der Wellen.

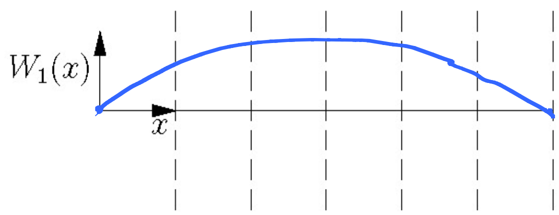


b) Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem die Auslenkung der Saite komplett Null ist? Wenn ja, geben Sie den Zeitpunkt t^* an.

nein ☒ ja ☐ $t^* =$ ______

c) Skizzieren Sie die erste Eigenform $W_1(x)$ des Systems.

1. Eigenform



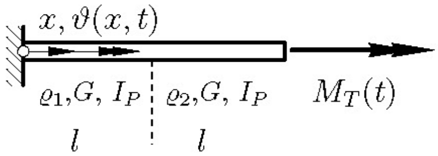
d) Hängt die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c von der Vorspannung der Saite ab?

ja ☒ nein ☐

Aufgabe 4

[5 Punkte]

Der skizzierte Torsionsstab wechselnder Dichte (ϱ_1, ϱ_2, G, $2l$, I_p) wird am rechten Ende durch ein Moment $M(t)$ zu Schwingungen angeregt.



Gegeben: ϱ_1, ϱ_2, G, I_p, l, $M(t)$

a) Geben Sie die Bewegungsgleichung(en) für den Torsionsstab in Abhängigkeit der gegeben Größen an.

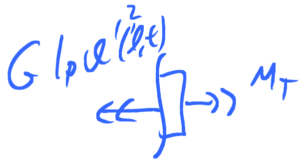
Bewegungsgleichung(en):

$\varrho_1 \ddot{\vartheta}(x,t) - G\vartheta''(x,t) = 0$ f. $0 \le x \le l$

$\varrho_2 \ddot{\vartheta}(x,t) - G\vartheta''(x,t) = 0$ f. $l \le x \le 2l$

b) Geben Sie alle Randbedingungen an.

Nebenrechnung, Skizze:



Randbedingungen:

$\vartheta(0,t) = 0$ $G I_p \vartheta'(2l,t) = M_T$

c) Das Moment $M_T(t) = \hat{M}_T \cos \Omega t$ sei nun harmonisch (Ω gegeben). Machen Sie jeweils einen Ansatz zur Berechnung der eingeschwungenen Bewegung $\vartheta_\mathrm{P}(x,t)$ und der freien Schwingung $\vartheta_\mathrm{h}(x,t)$.

$\vartheta_\mathrm{P}(x,t) = \Theta_p(x) \cos \Omega t$

$\vartheta_\mathrm{h}(x,t) = \Theta_h(x)\, p(t)$