TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2001
Fachbereich 3 - Mathematik
Pohst / Lusala

Probeklausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. am Schwarzen Brett und im WWW[1] **Ja / Nein**

Unterschrift

Neben einem einseitig handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Die Gesamtklausur ist mit 16 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindesten 5 von 20 Punkten erreicht werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an. Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

1	2	3	4	$\sum$

Einsichtnahme– und Beschwerdemöglichkeit:

[1] `http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/ING/klausuren.html`

Rechenaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 von A.

(ii) Berechnen Sie Eigenvektoren $\vec{s}_1$ und $\vec{s}_2$ von A bzgl. λ_1 bzw. λ_2.

(iii) Sei $S = (\vec{s}_1\ \vec{s}_2)$ und $D = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$. Berechnen Sie SDS^{-1}.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung

$$\begin{cases} \mathbb{R}^{2\times 2} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2\times 3} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a & \frac{a+b}{2} & b \\ c & \frac{c+d}{2} & d \end{pmatrix} \end{cases}$$

bzgl. der Basis

$$\vec{e}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{e}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{e}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{e}_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ und der Basis

$$\vec{f}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{f}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{f}_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

$$\vec{f}_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{f}_5 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{smallmatrix}\right),\ \vec{f}_6 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{smallmatrix}\right),$$

des $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

3. Aufgabe (7 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und die Matrix $B = (\vec{b}_1\ \vec{b}_2\ \vec{b}_3) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

(i) Bestimmen Sie den Rang von B und berechnen Sie $\det B$.

(ii) Seien

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Stellen Sie die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ als Linearkombination der Vektoren $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$ dar.

(iii) Berechnen Sie $B^{-1}A$ für $A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3) = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Fachbereich 3 - Mathematik
Pohst / Lusala

Probeklausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. am Schwarzen Brett und im WWW[2] **Ja / Nein**

Unterschrift

Neben einem einseitig handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Die Gesamtklausur ist mit 16 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindesten 5 von 20 Punkten erreicht werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze Begründung** an. Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

1	2	3	4	$\sum$

Einsichtnahme– und Beschwerdemöglichkeit:

[2] `http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/ING/klausuren.html`

Verständnisaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Seien $\vec{v}, \vec{w}$ zwei orthonormierte Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$. Überprüfen Sie anhand der Definition, daß

$$B := \{\vec{v}, \vec{w}, \vec{v} \times \vec{w}\}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sind die folgenden Teilmengen des Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ Untervektorräume?
(Zutreffendes bitte ankreuzen.)

	ja	nein
$U_1 := \{\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1 = 0\}$	◯	◯
$U_2 := \{\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1 x_2 = 0\}$	◯	◯
$U_3 := \{\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1 + x_2 = 0\}$	◯	◯
$U_4 := \{\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$	◯	◯
$U_5 := \{\vec{x} = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) \mid x_1 + x_2 = 1\}$	◯	◯

3. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten wir den Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der (2×2)–Matrizen

$$V = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

und darin den Untervektorraum der Dreiecksmatrizen

$$D = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, d \in \mathbb{R}\} \subset V \quad .$$

Wie groß ist die Dimension von D?

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ ein Vektor. Betrachten wir die lineare Abbildung

$$L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \longmapsto \vec{a} \times \vec{x} \quad .$$

(i) Verifizieren Sie, daß L bzgl. der Standarbasis die Darstellungsmatrix

$$A_L = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

besitzt.

(ii) Bestimmen Sie die Terme $\vec{a}^T L(\vec{x})$ und $\vec{x}^T L(\vec{x})$.

(iii) Besitzt die Gleichung $A_L \vec{x} = \vec{a}$ eine Lösung?

(iv) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von L und den Rang von A_L.