TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2001
Fachbereich 3 - Mathematik
Pohst / Lusala

Prüfungs-/Übungsschein-Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure/E-Techniker

Name: ....

Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. am Schwarzen Brett beim HM-Service-Center (Raum MA 708).

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. im WWW[1].

....
Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4-Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Die Gesamtklausur ist mit mindestens 16 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 5 von 20 Punkten erreicht werden. Fragen können während der Klausur leider nicht beantwortet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an und begründen Sie Ihren Lösungsweg. Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

1	2	3	4	5	$\sum$

[1] http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/SS_2001/ING/klausuren.html

Achtung: Notation des Gauß-Algorithmus

Notieren Sie jeden Gaußalgorithmus in Matrizenschreibweise und dokumentieren Sie jeden einzelnen Schritt wie folgt:

Hier wird auf die 3. Zeile das (-3)-fache der 1. Zeile addiert.

Ansonsten droht drastischer Punktabzug!

Rechenaufgaben

1. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 3x_5 & = & 3 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 20x_3 & - & 32x_4 & + & 40x_5 & = & -38 \\ 6x_1 & - & 6x_2 & + & 16x_3 & - & 14x_4 & - & 6x_5 & = & 6. \end{array}$$

Beachten Sie die Hinweise.

2. Aufgabe (3 Punkte)

Berechnen Sie eine Orthonormalbasis des Vektorraums der reellen Polynome, der von 1 und x aufgespannt wird, bzgl. des Skalarprodukts

$$< f, g >= \int_{-1}^{2} f(x)g(x)dx.$$

3. Aufgabe (5 Punkte)

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $P_1 = (0, 5, 2, 8)^T \in \mathbb{R}^4$ von der Ebene durch $P_0 = (1, 2, 3, 4)^T$, die von $\vec{v}_1 = (2, 0, 2, 0)^T$ und $\vec{v}_2 = (0, 2, 2, 0)^T$ im $\mathbb{R}^4$ aufgespannt wird.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A.

b) (1 Punkt) Ist A diagonalisierbar? Wenn ja, geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix an.

c) (1 Punkt) Folgern Sie ein Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\frac{d\vec{y}(t)}{dt} = A\vec{y}(t)$$

für $\vec{y}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$.

5. Aufgabe (4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 0, \qquad x(0) = 1,\ x'(0) = 0$$

für $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2001

Fachbereich 3 - Mathematik

Pohst / Lusala

Prüfungs/-Übungsschein-Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure/E-Techniker

Name: ....

Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. am Schwarzen Brett beim HM-Service-Center (Raum MA 708).

◯ Ich **wünsche** den Aushang der Ergebnisse meiner Klausur unter Angabe meiner Matr.–Nr. im WWW[2].

....

Unterschrift

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden. Die Gesamtklausur ist mit mindestens 16 von 40 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 5 von 20 Punkten erreicht werden. Fragen können während der Klausur leider nicht beantwortet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie immer eine **kurze Begründung** an. Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

6	7	8	$\sum$

[2] `http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/SS_2001/ING/klausuren.html`

Verständnisaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Kreuzen Sie in dieser Aufgfabe "wahr" oder "falsch" an. Jede richtige Antwort ergibt 1 Punkt, jede falsche Antwort -1 Punkt. Keine Antwort ergibt 0 Punkte. Die Gesamtbewertung der Aufgabe ergibt stets mindestens 0 Punkte.

(a) Die räumlichen Diagonalen eines Quaders Q im $\mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig.
($Q = \{\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \lambda_3\vec{x}_3 | \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1\}$, $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ sind orthogonal und nicht $\vec{0}$.)

(b) Für eine lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ muss $m \leq n$ sein.

(c) $A = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ hat keine reellen Eigenwerte.

(d) Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ist diagonalisierbar.

(e) Die Polynome $x^2 - 1, x^2 - x, x - 1$ sind über $\mathbb{R}$ linear abhängig.

(f) Es gilt: $\int_{-1}^{1}(x+1)^{500}(x-2)^{300}dx \leq \left(\int_{-1}^{1}(x+1)^{1000}dx\right)\left(\int_{-1}^{1}(x-2)^{600}dx\right)$.

(g) $\{(x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4 | \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0\}$ ist Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ der Dimension 3.

(h) $A = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & xe^{\lambda x} \\ \lambda e^{\lambda x} & e^{\lambda x} + \lambda x e^{\lambda x} \end{pmatrix}$ ist eine Wronski-Matrix vom Rang 2.

Entscheiden Sie bitte, welche der obigen Aussagen wahr oder falsch sind. (Zutreffendes bitte ankreuzen, ohne Angabe einer Begründung.)

	wahr	falsch
(a)	○	○
(b)	○	○
(c)	○	○
(d)	○	○
(e)	○	○
(f)	○	○
(g)	○	○
(h)	○	○

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2a & 3a \\ 1 & 4a & -6a \end{pmatrix}.$$

a) (3 Punkte) Man gebe alle $a \in \mathbb{R}$ an, für die der Nullraum ($\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | A\vec{x} = \vec{0}\}$) von A nicht nur aus dem Nullvektor besteht. Begründen Sie mit Hilfe von $\det A$, dass es höchstens 2 Werte für a geben kann.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie zu jedem a eine Basis des Nullraums. (Beachte: Basis von $\{\vec{0}\}$ ist $\emptyset$.)

3. Aufgabe (7 Punkte)

Betrachten Sie den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \quad (\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n)$$

und einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$P\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n, \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x} - \langle \vec{x}, \vec{a} \rangle \vec{a} \end{array}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

(a) P ist linear.

(b) Falls $< \vec{a}, \vec{a} >= 1$, ist $P^2 = P$. (Beachte: $P^2(\vec{x}) = P\big(P(\vec{x})\big)$.)

(c) $\vec{a}$ ist Eigenvektor.

(d) Für $< \vec{a}, \vec{a} > \neq 1$ ist Rang(P)$= n$.

(e) Für $< \vec{a}, \vec{a} >= 1$ ist Rang(P)$= n - 1$.

(f) (2 Punkte) Es gibt eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$, bzgl. der die P zugeordnete Matrix Diagonalgestalt hat.

Beachte: Rang(P) ist die Dimension des Bildraums von P.