Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 02

Faermann, Steinbach 24. 07.2002

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen Din-A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösung jeder Aufgabe ist in **Reinschrift** auf einem seperaten Din-A4 Blatt abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

12 Punkte

Sei eine lineare Abbildung A auf dem $\mathbb{C}^3$ gegeben durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ -c & b & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} , \qquad b, c \in \mathbb{R} \, , \quad i = \sqrt{-1} \, .$$

(i) Zeigen Sie folgende Gleichung für das charakteristische Polynom:

$$\det(A - \lambda E) \; = \; (i - \lambda)\,(\lambda - b + ic)\,(\lambda - b - ic) \; .$$

(ii) Was sind die Eigenwerte von A?

(iii) Für welche Werte der Parameter b, c hat A weniger als drei verschiedene Eigenwerte?

(iv) Für welche Werte der Parameter b, c hat A nur einen Eigenwert?

2. Aufgabe

8 Punkte

Betrachten Sie folgende Differentialgleichung:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x \; = \; \sin(t) \; .$$

Ohne Angabe einer Begründung, kreuzen Sie Zutreffendes an (richtige Antwort +2 Punkte, falsche Antwort 0 Punkte):

	wahr	falsch
$\cos(2t - \frac{\pi}{2})$ ist eine Lösung der homogenen Gleichung	○	○
Die Dimension des Lösungsraums der homogenen Gleichung ist 2	○	○
Die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung ist ein Vektorraum	○	○
$\sin(2t)$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung	○	○

3. Aufgabe

8 Punkte

Im Vektorraum der reellen 3×3 Matrizen seien gegeben

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Ist die Matrix C eine Linearkombination der Matrizen A und B?

(ii) Sind die drei Matrizen A,B,C linear unabhängig?

(iii) Welche Dimension hat der von diesen drei Matrizen aufgespannte Vektorraum?

4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sowie eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$L(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad L(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad L(\vec{v}_3) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Verifizieren Sie, dass die Abbildungsmatrix A von L bezüglich der Standardbasen $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^3$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ vom $\mathbb{R}^2$ gegeben ist durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Geben Sie die Lösungen des homogenen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ an.

(iii) Welche Vektoren $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ werden durch L auf den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ abgebildet?

(iv) Bilden die Vektoren aus *(ii)* einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$? Warum?