Technische Universität Berlin **SS 2002**

Fakultät II – Institut f. Mathematik

Doz. Faermann, Steinbach

Ass. Bollhöfer, Kato, Schulz-Baldes

Musterlösungen zur Klausur am 09.10.2002 - Rechenteil „Lineare Algebra für Ingenieure“

http://www.math.tu-berlin.de/HM/LinAlg/Aktuell/main.html

---

1. Aufgabe: 12 Punkte

Teil *(i)-(ii)*

$$\begin{array}{rrr|rrl}
3 & -1 & 1 & 1 & 1 & \\
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \\
2 & -2 & 2 & 0 & -1 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & I \leftrightarrow II \\
3 & -1 & 1 & 1 & 1 & \\
2 & -2 & 2 & 0 & -1 & \\
\hline
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \\
0 & -4 & 4 & -2 & 4 & II \rightarrow II - 3I \\
0 & -4 & 4 & -2 & 1 & III \rightarrow III - 2I \\
\hline
1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \\
0 & -4 & 4 & -2 & 4 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & III \rightarrow III - II
\end{array}$$

Berechnung $L_{\vec{b}}$. Freier Parameter $\boxed{z = t}$

$\Rightarrow -4y + 4t = -2 \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2} + t} \Rightarrow x + y - t = x + (\frac{1}{2} + t) - t = 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow L_{\vec{b}} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$L_{\vec{c}} = \emptyset$

Teil *(iii)* nein, Begründung (z.B. $0 \notin L_{\vec{b}}$)

2. Aufgabe: 10 Punkte

Teil *(i)*

$$\begin{aligned}
\det(B - \lambda E) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \quad \text{Entw. nach letzter Zeile} \\
&= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)[(1-\lambda)^2 + 1] = \boxed{(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2)}
\end{aligned}$$

Teil *(ii)*

$(3-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1^2 - 2} = 1 \pm i$

Teil *(iii)*
Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 1+i$

$$\begin{array}{ccc} -i & 1 & 1 \\ -1 & -i & 3 \\ 0 & 0 & 2-i \\ \hline -i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3+i \\ 0 & 0 & 2-i \\ \hline -i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3+i \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ II \to II + iI \\ \\ \\ \\ III \to III - \frac{2-i}{3+i} II \end{array}$$

$\Rightarrow \boxed{z=0} \Rightarrow -ix + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = ix}$

$$\Rightarrow \vec{v}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0 \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_2 = 1+i$$

$$\Rightarrow \vec{v}_3 = \overline{\vec{v}}_2 = t \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0 \text{ ist Eigenvektor zu } \lambda_3 = 1-i$$

3. Aufgabe: 10 Punkte

Teil *(i)* char. Gleichung $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$

$\Rightarrow \{e^{it}, e^{-it}\}$ bilden komplexes Fundamentalsystem
bzw. $\{\sin t, \cos t\}$ bilden reelles Fundamentalsystem
d.h. $x_H(t) = a \sin t + b \cos t,\ a, b \in \mathbb{R}$ allg. homogene Lsg.

Teil *(ii)*
Ansatz nach Art der rechten Seite
$x_p := \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t)$

$\Rightarrow x_p'' + x_p = -4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t) + \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t) = \cos(2t)$
Koeffizientenvergleich $-3\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0,\ -3\beta = 1 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow x_p(t) = -\frac{1}{3} \cos(2t)$

Teil *(iii)* $L = \left\{ x_p + x_H = -\frac{1}{3}\cos(2t) + a \sin t + b \cos t :\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

Teil *(iv)*
$x'(t) = \frac{2}{3} \sin(t) + a \cos t - b \sin t$

$x(0) = 2 \Rightarrow -\frac{1}{3} + b = 2 \Rightarrow b = \frac{7}{3}.\ x'(0) = 0 \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow x(t) = -\frac{1}{3} \cos(2t) + \frac{7}{3} \cos t$

4. Aufgabe: **8 Punkte**

Teil *(i)*

$|\vec{v}| = \sqrt{1+2a^2} \Rightarrow \frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{1+2a^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$ normierter Vektor

Teil *(ii)*
Projektion $P\vec{w}$ von $\vec{w}$ auf $\vec{v}$ ist $P\vec{w} = \frac{\vec{v}*\vec{w}}{\vec{v}*\vec{v}}\vec{v}$. $\Rightarrow \vec{v}*\vec{w} = 1\cdot 1 + a\cdot 2 + a\cdot(-1) = 1+a$

Damit ist die Projektion $\frac{1+a}{1+2a^2} \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a \end{pmatrix}$

Teil *(iii)*

$P\vec{w} = \frac{\vec{v}*\vec{w}}{\vec{v}*\vec{v}}\vec{v} = \vec{v}\frac{\vec{v}^\top\vec{w}}{\vec{v}^\top\vec{v}}$. $\Rightarrow P = \frac{\vec{v}\,\vec{v}^\top}{\vec{v}^\top\vec{v}} = \frac{1}{1+2a^2} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & a^2 & a^2 \\ a & a^2 & a^2 \end{pmatrix}$