Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 02
Faermann, Steinbach 09.10.2002

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen Din-A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Bei jeglichem Täuschungsversuch gilt die Klausur als **nicht** bestanden.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei eine lineare Abbildung A auf dem $\mathbb{C}^3$ dargestellt durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und 3 Eigenvektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ von A:

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Was sind die Eigenwerte von A?

(ii) Sei ferner folgende invertierbare Matrix gegeben:

$$S := \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Was sind die Eigenwerte von $B := S^{-1}AS$? (Auch hier ist kein größerer Rechenaufwand erforderlich)

2. Aufgabe

10 Punkte

Sei $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Abbildungen linear Abbildungen auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sind (richtige Antwort +2 Punkte, falsche Antwort -2 Punkte, Gesamtpunktzahl mindestens 0):

	linear	nicht
Translation (Verschiebung) um den Vektor $\vec{w}$	○	○
Rotation um x-Achse um π, gefolgt von Rotation um z-Achse um $\frac{\pi}{2}$	○	○
Rotation um x-Achse um π, gefolgt von Translation um $\vec{w}$	○	○
Spiegelung an der z-Achse	○	○
Projektion auf den von $\vec{w}$ aufgespannten Unterraum	○	○

3. Aufgabe

10 Punkte

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}_2[x]$ der reellen Polynome höchstens zweiten Grades in x.

(i) Sind die Polynome $Q_1(x) = 2x$ und $Q_2(x) = 2x^2$ linear abhängig?

(ii) Sind die Polynome $P_1(x) = 2x$, $P_2(x) = 2x-1$ und $P_3(x) = 2$ linear abhängig?

(iii) Falls möglich, schreiben Sie P_3 als Linearkombination von P_1 und P_2.

(iv) Was ist die Dimension des von P_1, P_2 und P_3 aufgespannten Vektorraums?

4. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y \;=\; 0\;.$$

(i) Welche der folgende Funktionen sind Lösungen dieser Differentialgleichung?

$$y_1(x) \;=\; e^{-2x}\;, \qquad y_2(x) \;=\; e^{2x}\;, \qquad y_3(x) \;=\; xe^{-2x}\;.$$

(ii) Sind die Funktionen y_1, y_2 und y_3 linear unabhängig? (Begründung nicht vergessen!)

(iii) Welche dieser Funktionen bilden ein Fundamentalsystem für obige Differentialgleichung?