Aufgabe 1 — 10 Punkte

Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie $det(A)$.

(b) Ist 0 ein Eigenwert von A?

(c) Bestimmen Sie den Kern von A.

(d) Zeigen Sie:

$$x := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

löst die Gleichung:

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(e) Finden Sie die Lösungsmenge von

$$Ax = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2 — 8 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie alle Werte des Parameters a für die $Rang(A) \leq 2$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Kerns von A für den größten der oben bestimmten Werte von a.

Aufgabe 3 8 Punkte

Skizzieren Sie

$$\phi_A(x) = Ax$$

für die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und folgende Matrizen A:

(a)

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Geben Sie für A wie in (a) bzw. (b) jeweils eine geometrische Interpretation der Abbildung

$$\phi_A(x) = Ax$$

an.

(d) Zeigen Sie, dass $A = A^2$ für die Matrix A vom Fall (b)

Aufgabe 4 4 Punkte

Sei V ein Vektorraum und $v_1, v_2, v_3 \in V$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr beziehungsweise falsch:

(a) v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig $\Rightarrow$ v_1, v_2 sind auch linear unabhängig.

(b) v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig $\Rightarrow$ v_1, v_2 sind auch linear abhängig.

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5 10 Punkte

Gegeben seien die Funktionen

$$y_1(x) = \cos 2x, \qquad y_2(x) = \sin 2x, \qquad y_3(x) = e^{3x}$$

(a) Überprüfen Sie mit dem Wronski-Test, ob $\{y_1, y_2, y_3\}$ linear unabhängig sind.

(b) Geben Sie eine homogene gewöhnliche Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten an, die diese Funktionen als Lösungsbasis hat.