Technische Universität Berlin **SS 2003**
Fakultät II – Institut f. Mathematik
Faermann, Hombach, Seiler
Kato, Pavlioukevitch, Schulz-Baldes

Lösungsskizzen zur Klausur, 23. Juli, SS 03 - Verständnisteil „Lineare Algebra für Ingenieure“

---

1. Aufgabe: **10 Punkte**

(i) (3 Punkte) U_1 ist als Lösungsmenge einer homogenen linearen Differentialgleichung ein Untervektorraum.

(ii) (3 Punkte) U_2 ist kein Untervektorraum, da mit $p \in U_2$ und $q \in U_2$ gilt, dass $(p+q)(0) = 2 \neq 1$, also $p + q \notin U_2$

(iii) (2 Punkte) U_3 ist eine Menge von Vektoren, die eine homogene lineare Gleichung erfüllen, ist also ein Untervektorraum.

(iv) (2 Punkte) U_4 ist kein Untervektorraum, da etwa $\vec{v} = (-2, 0) \in U_4$, aber $-\vec{v} = (2, 0) \notin U_4$.

2. Aufgabe: **10 Punkte**

(i) (6 Punkte) Das charakteristische Polynom ist:

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix} = -(a^2 - \lambda^2) - b^2 = \lambda^2 - (a^2 + b^2)$$

also sind die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{a^2 + b^2}\ ,$$

(ii) (4 Punkte) Für die Orthogonalität muss $TT^t = E_2$ gelten. Da

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist somit $a^2 + b^2 = 1$ die Bedingung für die Orthogonalität.

3. Aufgabe: **10 Punkte**

(i) (4 Punkte) Da $Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2y - 3x$ gilt $Q\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = Q\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \lambda Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, also die Linearität.

(ii) (3 Punkte) Die Determinante wird genau dann null, wenn die Spaltenvektoren linear abhngig sind. Es muss also (x, y) ein Vielfaches von $(2, 3)$ sein. Somit:

$$\mathrm{Kern}(Q) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

(iii) (3 Punkte) Nach dem Dimensionssatz gilt $\dim(\mathrm{Bild}) = 2 - \dim(\mathrm{Kern}) = 1$.

4. Aufgabe: **10 Punkte**

(i) (6 Punkte) Mit dem Exponentialansatz (2 Punkte) findet man die Wurzeln (2 Punkte)

$$\lambda_\pm \; = \; -\frac{f}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2}{4} - 1} \; .$$

Also sind zwei linear unabhängigen Lösungen (2 Punkte)

$$y_+(t) \; = \; e^{\lambda_+ t} \; , \qquad y_-(t) \; = \; e^{\lambda_- t} \; .$$

(ii) (4 Punkte) Die Oszillationen treten auf, wenn $\lambda_\pm$ nicht verschwindenden Imaginärteil haben, also $\frac{f^2}{4} - 1 < 0$. Somit entspricht $f = 1$ Graph B, und $f = 4$ Graph A.