Verständnisteil

1. Aufgabe

2 (i) Nein (**1 Punkt**),
für $a = 2$ sind die Vektoren linear abhängig, so daß $\operatorname{rang} B < 3$
(Begründung **1 Punkt**).

3 (ii) Die Vektoren werden für $a = 2$ linear abhängig (**1 Punkt**),
genau dann wenn $\det B = 0$ (Begründung **1 Punkt**).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(Linearkombination } \mathbf{1\ Punkt}\text{)}$$

2 (iii) B ist invertierbar für $a \neq 2$ (**1 Punkt**),
genau dann wenn $\det B \neq 0$ (Begründung **1 Punkt**).

3 (iii) $$BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = E \quad \text{(Rechnung } \mathbf{2\ Punkte}\text{)}$$

C ist die inverse Matrix zu B für $a = 1$ (**1 Punkt**).

2. Aufgabe

3 (i) Ja (**1 Punkt**), denn

$$\operatorname{Spur}\left(\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} x_{11}+y_{11} & x_{12}+y_{12} \\ x_{21}+y_{21} & x_{22}+y_{22} \end{pmatrix}$$

$$= (x_{11}+y_{11}) + (x_{22}+y_{22}) = (x_{11}+x_{22}) + (y_{11}+y_{22})$$

$$= \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} + \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Spur}\left(\lambda\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} \lambda x_{11} & \lambda x_{12} \\ \lambda x_{21} & \lambda x_{22} \end{pmatrix} = \lambda x_{11} + \lambda x_{22}$$

$$= \lambda\,(x_{11}+x_{22}) = \lambda \operatorname{Spur}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

für alle $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \in M\,(2\times 2, \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$
(Begründung **2 Punkte**).

3 (ii) $\operatorname{Spur}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = -a,$ also

$$\operatorname{Kern}(\operatorname{Spur}) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}}_{(\textbf{2 Punkte})} \,\middle|\, \underbrace{a, b, c \in \mathbb{R}}_{(\textbf{1 Punkt})} \right\}$$

$$\left(\text{oder}\quad \operatorname{Kern}(\operatorname{Spur}) = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, d = -a}_{(\textbf{2 Punkte})} \;,\; \underbrace{a, b, c \in \mathbb{R}}_{(\textbf{1 Punkt})} \right\}\right)$$

2 (iii) Ja (**1 Punkt**),
laut Skript ist der Kern einer linearen Abbildung stets Unterraum des Definitionsbereiches (Begründung **1 Punkt**).

2 (iv) dim Kern (Spur)= 3 (**2 Punkte** für die korrekte Folgerung aus der Antwort zu (ii))

3. Aufgabe

3 (i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (**2 Punkte**),
da sie die Eigenwerte 1 und 2 besitzt (Begründung **1 Punkt**).

3 (ii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (**2 Punkte**),
da sie wegen $\quad p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \quad$ die Eigenwerte $\pm i$ hat (Begründung **1 Punkt**).

3 (iii) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (**2 Punkte**),
da $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (Begründung **1 Punkt**).

3 (iv) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (**2 Punkte**),
da sie den doppelten Eigenwert 1 hat. Der zugehörige Eigenraum ist nur eindimensional, aufgespannt durch den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, also nicht diagonalisierbar (Begründung **1 Punkt**).

4. Aufgabe

zur Dgl: beide keine Lösungsbasis (pro richtige Antwort **2 Punkte**)
zu UR: erste Menge ist ein Unterraum, die zweite nicht (pro richtige Antwort **2 Punkte**).

Rechenteil

1. Aufgabe

3 (i) $\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ (Gauß **1 Punkt**)

$2x + y - z = 0$ (Zwischenrechnung **1 Punkt**)

$\mathrm{Kern}(A - E) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ (Lösung **1 Punkt**)

1 (ii) $\dim \mathrm{Kern}(A - E) = 2$ (**1 Punkt** für die korrekte Folgerung aus der Antwort zu (i))

2/1 (iii) $\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) - 2(1-\lambda)$

$= (1-\lambda)(\lambda^2 + \lambda - 2) = (1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = -\lambda^3 + 3\lambda - 2$

(char. Polynom als Produkt **2 Punkte**; falls nur die ausmultiplizierte Form steht hier **1 Punkt** und für die Faktorisierung in (iv) **1 Punkt**)

1/2 (iv) $\lambda_{1/2} = 1$, $\lambda_3 = -2$ (alle Eigenwerte **1 Punkt**)

3 (v) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (**1 Punkt**) , $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (**1 Punkt**)

Eigenvektoren zum Eigenwert 1, siehe (i)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$ (**1 Punkt**)

Eigenvektor zum Eigenwert -2

2. Aufgabe

4 (i) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad + \text{ 1. Zeile}$$

(Aufstellen des LGS in Matrixschreibweise oder mit Polynomen **1 Punkt**)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \text{ - } 3 \cdot 2. \text{ Zeile} \quad \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(Rechnung **2 Punkte**)
Nein, die Vektoren sind linear abhängig, da obiges LGS nichttriviale Lösungen besitzt. (Antwort mit Begründung **1 Punkt**)

2 (ii) Die Dimension ist 2 (**1 Punkt**),
abzulesen an dem Rang der obigen 3×3-Matrix (Begründung **1 Punkt**).

4 (iii) $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad + \text{ 1. Zeile}$$

(Aufstellen des LGS in Matrixschreibweise oder mit Polynomen **1 Punkt**)

$$\rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \text{ - } 3 \cdot 2. \text{ Zeile} \quad \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

(Rechnung **2 Punkte**)
Nein, da das LGS ist nicht lösbar ist, abzulesen an der 3. Zeile
(Antwort mit Begründung **1 Punkt**).

3. Aufgabe

2 (i) $$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad , \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad , \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

(für alle 3 Skalarprodukte **2 Punkte**; **1 Punkt**, falls nur eins oder zwei korrekt)

2 (ii) $$\vec{x}_1^\circ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_2^\circ = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{x}_3^\circ = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(für alle 3 Normierungen **2 Punkte**; **1 Punkt**, falls nur eine oder zwei korrekt)

4 (iii) Länge der Projektion

$$| \underbrace{\langle \vec{y}, \vec{x}_3^\circ \rangle}_{\textbf{(1 Punkt)}} | = \left| \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right| = \left| -\frac{1}{\sqrt{5}} \right| = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{(}\textbf{1 Punkt}\text{, auch mit “-”)}$$

Projektionsvektor

$$\underbrace{\langle \vec{y}, \vec{x}_3^\circ \rangle \, \vec{x}_3^\circ}_{\textbf{(1 Punkt)}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(}\textbf{1 Punkt}\text{)}$$

4. Aufgabe

6 (i)
$$\det(B-\lambda E) = \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 4 \\ -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)(5-\lambda)+8$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda-3)(\lambda-1)$$

Eigenwerte $\lambda_1 = 3$ (**1 Punkt**) , $\lambda_2 = 1$ (**1 Punkt**)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Eigenvektor zum Eigenwert 3 (**2 Punkte**)

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ Eigenvektor zum Eigenwert 1 (**2 Punkte**)

6 (ii)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(t) = e^{Bt}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t} & 2e^t \\ e^{3t} & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

(Inverse **2 Punkte**, Diagonalisierung von B **2 Punkte**, $\vec{x}(t) = e^{Bt}\vec{x}(0)$ **1 Punkt**, Lösung **1 Punkt**)
Oder:

$$\vec{x}(t) = \mu_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\textbf{4 Punkte})$$

und aus Anfangswert folgt $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$ (**2 Punkte**), also

$$\vec{x}(t) = e^t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$