Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 03

Seiler, Faermann, Hömberg 15. Oktober 2003

Juli – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Falls Ihr Studiengang 40% Hausaufgaben fordert:
In welchem Semester haben Sie die erreicht? ....

Neben **einem handbeschriebenen** A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Eine lineare Abbildung auf dem $\mathbb{R}^3$ sei gegeben durch die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

(i) Sei E die Einheitsmatrix auf $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie den Kern der Abbildung $(A - E)$.

(ii) Was ist die Dimension des Kernes von $(A - E)$.

(iii) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A.

(iv) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(v) Geben Sie, sofern möglich, 3 linear unabhängige Eigenvektoren von A an.

2. Aufgabe

10 Punkte

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ der Polynome in x vom Grade kleiner oder gleich 2 und mit reellen Koeffizienten. Gegeben seien 3 Vektoren darin:

$$p_1(x) \;=\; x^2 - 1 \;, \qquad p_2(x) \;=\; x^2 + x + 2 \;, \qquad p_3(x) \;=\; 3x^2 + x \;.$$

(i) Bilden die Vektoren $\{p_1, p_2, p_3\}$ ein System von linear unabhängigen Vektoren im Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$?

(ii) Was ist die Dimension des von p_1, p_2 und p_3 aufgespannten Vektorraumes?

(iii) Kann das Polynom

$$q(x) \;=\; x$$

als Linearkombination von p_1, p_2 und p_3 dargestellt werden?

3. Aufgabe

8 Punkte

Betrachten Sie den euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt. Gegeben seien folgende Vektoren:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ paarweise orthogonal sind.

(ii) Orthonormalisieren Sie die Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$.

(iii) Sei gegeben $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie den Vektor gegeben durch die Projektion von $\vec{y}$ in die Richtung von $\vec{x}_3$. Berechnen Sie auch die Länge dieses Vektors.

4. Aufgabe

12 Punkte

Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

als lineare Abbildung auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von B.

(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = B\,\vec{x}(t), \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$