A

Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Eppler, Richter, Scherfner, Seiler, Zorn

WS 03/04
25. Februar 2004

Februar – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Falls Ihr Studiengang Hausaufgaben fordert:
In welchem Semester haben Sie die erreicht? ....

Neben **einem handbeschriebenen** A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußalgorithmus die Inverse von A und überprüfen Sie das Ergebnis durch eine Rechnung explizit.

(ii) Lösen Sie mit Hilfe der in (i) berechneten Inversen die Gleichung
$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Aufgabe 9 Punkte

Sei der Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt gegeben, d.h. für $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ist das Skalarprodukt $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle := x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3 + x_4 \cdot y_4$. Und seien die Vektoren

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(i) Zeigen Sie, dass $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens eine Orthonormalbasis des von $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ aufgespannten Teilraumes von $\mathbb{R}^4$.

3. Aufgabe 10 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

(ii) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

(iii) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

(iv) Geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix an. (Es ist keine lange Rechnung nötig!)

4. Aufgabe 12 Punkte

Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) - x(t) = \sin(t) \qquad \text{(für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

mit den Anfangswerten

$$x(0) = 0, \qquad \frac{dx}{dt}(0) = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

(i) Leiten Sie mit dem Exponentialansatz die charakteristische Gleichung für die zu (1) gehörende **homogene** Differentialgleichung her.

(ii) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der **homogenen** Differentialgleichung.

(iii) Zeigen Sie, dass durch $x_p(t) := -\frac{1}{2}\sin(t)$ eine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung (1) gegeben ist.

(iv) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der **inhomogenen** Differentialgleichung (1).

(v) Lösen Sie das Anfangswertproblem (1), (2).