A

Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik
Eppler, Richter, Scherfner, Seiler, Zorn

WS 03/04
7. April 2004

April – Klausur (Rechenteil)
Lösungen Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Falls Ihr Studiengang Hausaufgaben fordert:
In welchem Semester haben Sie die erreicht? ....

Neben **einem handbeschriebenen** A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

9 Punkte

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Lösen Sie mit Hilfe des Gaußalgorithmus die Gleichung $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Lösung:
Wir wenden den Gaußalgorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix an:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{4.Z:4.-1.}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{2.Z:1.-2.}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{3.Z:3.-2.}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{1.Z:1.-2.-3.}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{2.Z:2.+4.}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\overset{3.Z:3.-4.}{\longleftrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Daraus liest man die Lösung direkt ab zu:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußalgorithmus die Determinante von A.

Lösung:
Die Determinante kann direkt mit dem Gaußalgorithmus berechnet werden. Dabei ist zu beachten, dass bei Zeilenvertauschungen (haben wir nicht verwendet) ein Faktor -1 und bei Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar λ dieser Skalar als Faktor auftritt. Damit brauchen wir den Gaußalgorithmus nicht neu durchzuführen, sondern können obige Rechnung verwenden. Im 2. Schritt tritt in der Linearkombination der Faktor -1 auf, so dass sich ergibt: $\det(A) = -1$.

2. Aufgabe

9 Punkte

Im Vekorraum $\mathbb{R}^2$ seien die Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ gegeben mit

$$\mathcal{B}_1 := \{\vec{v}_1 := \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 := \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\}, \qquad \mathcal{B}_2 := \{\vec{w}_1 := \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \vec{w}_2 := \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}.$$

(i) Berechnen Sie die Basiswechselmatrix S für den Basiswechsel von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

Lösung:
Für die Basiswechselmatrix S gilt gemäß kommutativem Diagramm:

$$S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$$

mit den Koordinatenabbildungen $K_{\mathcal{B}_1}$ und $K_{\mathcal{B}_2}$.
Da die Basis $\mathcal{B}_1$ die Standardbasis ist, ist die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}_1}$ die identische Abbildung bzw. ist sie als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\vec{x} \mapsto E_2\vec{x}$ mit der 2×2-Einheitsmatrix E_2.
Für $K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$ als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liest man die entsprechende 2×2-Matrix aus der Basis direkt ab; in ihr stehen die Basisvektoren als Spalten:

$$K_{\mathcal{B}_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wie berechnen ihre Inverse:

$$K_{\mathcal{B}_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für die Basiswechselmatrix:

$$S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1} = K_{\mathcal{B}_2} \circ E_2 = K_{\mathcal{B}_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(ii) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\vec{x} := \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$.

Lösung:
Die Koordinaten von $\vec{x}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$ berechnen sich zu:

$$\vec{x}_{\mathcal{B}_2} = K_{\mathcal{B}_2}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

Außerdem betrachten wir die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \vec{x} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\vec{x}.$$

(iii) Berechnen Sie die darstellende Matrix $L_{\mathcal{B}_2}$ von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$.

Lösung:
Für die Matrixdarstellung gilt $L_{\mathcal{B}_2} = K_{\mathcal{B}_2} \circ L \circ K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$. Da die Abbildung L bereits als (Multiplikation mit einer) Matrix gegeben ist, entspricht die Komposition der Abbildungen der Matrizenmultiplikation und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
L_{\mathcal{B}_2} &= K_{\mathcal{B}_2} \circ L \circ K_{\mathcal{B}_2}^{-1} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alternativ kann man die darstellende Matrix auch direkt über die Koordinaten der Bilder der Basisvektoren von $\mathcal{B}_2$ berechnen.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Lösung:
Für das charakteristische Polynom von A gilt:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} (2-\lambda) & 0 & 1 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ -1 & 0 & (-\lambda) \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(-\lambda) + 1] \\ &= (2-\lambda) \cdot [\lambda^2 - 2\lambda + 1] \\ &= (2-\lambda) \cdot (\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte von A die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind, lesen wir für sie aus der letzen Gleichung ab:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \quad \text{(algebraische Vielfachheit: 1)} \\ \lambda_2 &= 1 \quad \text{(algebraische Vielfachheit: 2)} \end{aligned}$$

(ii) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

Lösung:
Der Eigenraum zu einem Eigenwert λ ist der Kern von $A - \lambda E_3$. Wir lösen also das entsprechende homogene lineare Gleichungssystem.

$\lambda = 2$:
Wir müssen $(A - 2E_3)\vec{x} = \vec{0}$ lösen.

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus lesen wir sofort für den Eigenraum ab:

$$\text{Eigenraum}(A, 2) = \text{span}\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Dieser Eigenraum hat Dimension 1 (geometrische Vielfachheit: 1).

$\lambda = 1$:
Wir müssen $(A - 1E_3)\vec{x} = \vec{0}$ lösen. Es gilt:

$$A - 1E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Darauf wenden wir den Gaußalgorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{3.:1.+3.}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus lesen wir sofort für den Eigenraum ab:

$$\text{Eigenraum}(A, -1) = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

Dieser Eigenraum hat Dimension 1 (geometrische Vielfachheit: 1).

(iii) Falls A diagonalisierbar ist, geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix an. Falls A nicht diagonalisierbar ist, begründen Sie, wieso die Matrix A nicht diagonalisierbar ist.

Lösung:
In (i) haben wir die Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten bestimmt. In (ii) haben wir die zugehörigen Eigenräume bestimmt und ihre Dimensionen abgelesen. Die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten stimmen nicht überein. Daher ist A nicht diagonalisierbar.

4. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = \cos(t) \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

mit den Anfangswerten

$$x(0) = 1, \qquad \frac{dx}{dt}(0) = 1. \tag{2}$$

(i) Leiten Sie mit dem Exponentialansatz die charakteristische Gleichung für die zu (1) gehörende **homogene** Differentialgleichung her.

Lösung:
Die zu (1) gehörende homogene Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

Wir machen den Exponentialansatz für eine Lösung der homogenen DGL:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Nun berechnen wir die Ableitungen:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Nun setzen wir den Ansatz in die homogene DGL (3) ein:

$$\begin{aligned} & \frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) && (4)\\ \iff\ & \lambda^2 e^{\lambda t} + e^{\lambda t} = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) && (5)\\ \iff\ & e^{\lambda t}(\lambda^2 + 1) = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) && (6)\\ \iff\ & \lambda^2 + 1 = 0 && (7) \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist die *charakteristische Gleichung*.

(ii) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der **homogenen** Differentialgleichung.

Lösung:
Aus der in (i) gefundenen charakteristischen Gleichung lesen wir ihre Lösungen ab:

$$\lambda_1 = i, \qquad \lambda_2 = -i$$

Da wir zwei konjugiert komplexe Nullstellen gefunden haben, erhalten wir zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL (3) als Real- und Imgaginärteil:

$$x_1(t) = \Re e^{it} = \cos(t), \qquad x_2(t) = \Im e^{it} = \sin(t)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist der Span von ihnen:

$$x_h(t) = \mu_1 \, x_1(t) + \mu_2 \, x_2(t) = \mu_1 \, \cos(t) + \mu_2 \, \sin(t)$$

(iii) Zeigen Sie, dass durch $x_p(t) := \frac{1}{2} t \cdot \sin(t)$ eine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung (1) gegeben ist.

Lösung:
Wir berechnen die Ableitungen von x_p:

$$\frac{dx_p}{dt}(t) = \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}t \cdot \cos(t), \quad \frac{d^2x_p}{dt^2}(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}t \cdot \sin(t) = \cos(t) - \frac{1}{2}t \cdot \sin(t)$$

Wir setzen dies in die DGL ein:

$$\frac{d^2x_p}{dt^2}(t) + x_p(t) = \cos(t) - \frac{1}{2}t \cdot \sin(t) + \frac{1}{2}t \cdot \sin(t) = \cos(t)$$

Daraus lesen wir ab, dass x_p tatsächlich die inhomogene DGL (1) erfüllt.

(iv) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der **inhomogenen** Differentialgleichung (1).

Lösung:
Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL (1) ist die Summe aus der Lösungsgesamtheit der homogenen DGL und *einer* Lösung der inhomogenen DGL. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL haben wir in (ii) bestimmt. In (iii) haben wir gezeigt, dass x_p *einer* Lösung der inhomogenen DGL ist. Damit erhalten wir als Lösungsgesamtheit der inhomoegnen DGL:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \mu_1 \, \cos(t) + \mu_2 \, \sin(t) + \frac{1}{2}t \cdot \sin(t) \tag{8}$$

(v) Lösen Sie das Anfangswertproblem (1), (2).

Lösung:
Wir berechnen die Ableitung der allgemeinen Lösung (8):

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\mu_1 \, \sin(t) + \mu_2 \, \cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t) + \frac{1}{2}t \cdot \cos(t)$$

Nun setzen wir die Anfangsbedingungen ein:

$$\begin{aligned} 1 &= x(0) = \mu_1 \\ 1 &= \frac{dx}{dt}(0) = \mu_2 \end{aligned}$$

Daraus liest man ab:

$$\mu_1 = 1, \qquad \mu_2 = 1$$

Dies setzen wir in die allgemeine Lösung (8) ein und erhalten als Lösung des Anfangswertproblems (1), (2):

$$x(t) = \mu_1 \, \cos(t) + \mu_2 \, \sin(t) + \frac{1}{2}t \cdot \sin(t) = \cos(t) + \sin(t) + \frac{1}{2}t \cdot \sin(t)$$