A

Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Eppler, Richter, Scherfner, Seiler, Zorn

WS 03/04
7. April 2004

April – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben **einem handbeschriebenen** A4 Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Es sei folgendes Maple Worksheet gegeben:

```
> B := matrix([[7,-2,1],[-2,10,-2],[1,-2,7]]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(B);
```

$$[6, 2, \{[2,1,0], [-1,0,1]\}], [12, 1, \{[1,-2,1]\}]$$

```
> M := matrix([[1,2,3],[4,5,6],[7,11,15]]);
```

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 11 & 15 \end{bmatrix}$$

```
> kernel(M);
```

$$\{[1, -2, 1]\}$$

1. Welche Information beinhaltet das Ergebnis des zweiten Befehls?
2. Kann man aus der Ausgabe des zweiten Befehls etwas über die Diagonalisierbarkeit von B schließen, ohne weitere Rechnungen zu benötigen? Falls ja, was? (Begründen Sie Ihre Antwort!)
3. Wie würde die zu B zugehörige Diagonalmatrix aussehen?
4. Was bedeutet das Ergebnis des vierten Befehls?
5. Kann man aus der Ausgabe des vierten Befehls etwas über die Invertierbarkeit von M schließen, ohne weitere Rechungen zu benötigen? Falls ja, was? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

2. Aufgabe

15 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \mapsto N\vec{x}$ definiert durch die Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

1. Berechnen Sie N^2 und N^3.
2. Berechnen Sie die Eigenwerte von N.
3. Berechnen Sie alle Eigenvektoren von N.
4. Untersuchen Sie, ob N diagonalisierbar ist.
5. Berechnen Sie $\exp(tN)$. Hinweis: $\exp(tN) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k$
6. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \frac{d}{dt}\vec{y}(t) = N\vec{y}(t)$$

3. Aufgabe

5 Punkte

Sei A eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^3$ in den $\mathbb{R}^3$. Sei $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ und $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert μ. Sei ferner $\lambda \neq \mu$. Bestimmen Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

Pro richtiger Antwort gibt es einen Punkt, pro falscher Antwort wird ein Punkt abgezogen, es gibt minimal null Punkte. Eine Begründung der Antwort ist in dieser Aufgabe nicht notwendig.

	richtig	falsch
$2\vec{u}$ ist Eigenvektor zu 2λ	○	○
$\alpha\vec{u}$ ist Eigenvektor zu λ für alle $\alpha \neq 0$	○	○
$\vec{u} + \vec{v}$ ist Eigenvektor zu $\lambda + \mu$	○	○
$\lambda = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \in \mathrm{Kern} A$	○	○
$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig	○	○

4. Aufgabe

10 Punkte

Seien die Polynome p_1, p_2, p_3 und p_4 definiert durch

$$p_1(x) := x^2 + 1 \qquad p_2(x) := x^2 + x \qquad p_3(x) := x + 1 \qquad p_4(x) := x^2 + x + 1 .$$

1. Sind p_1, p_2, p_3, p_4 als Elemente des Vektorraumes $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ der Polynome vom Grad ≤ 2 linear unabhängig?
2. Stellen Sie das Polynom $r(x) = x$ als Linearkombination von p_1, p_2, p_3 und p_4 dar.
3. Geben Sie eine Basis des Vektorraumes $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ an.
4. Geben Sie die Dimension des Vektorraumes $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ an.