Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04
Liesen, Lutz, Seiler 21. Juli 2004

Juli – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

1	2	3	4	Σ_V

1. Aufgabe

14 Punkte

Es sei folgende Matrix gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Welchen Rang hat die Matrix A?

(ii) Welche Dimension hat der Kern der linearen Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$?

(iii) Für welche Vektoren $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5$ ist das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar?

(iv) Geben Sie die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme

$$\text{(a)} \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(b)} \quad A\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{an.}$$

2. Aufgabe

7 Punkte

Die Vektoren

$$\vec{w}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bilden eine Orthonormalbasis des euklidischen Raumes $\mathbb{R}^3$ (versehen mit dem Standardskalarprodukt).

(i) Geben Sie das Volumen des von den Vektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ aufgespannten Spates an.

(ii) Geben Sie die Inverse W^{-1} der Matrix W an, die die Vektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ als Spaltenvektoren hat.

(iii) Geben Sie die Lösung des linearen Gleichungssystems $\quad W\vec{x} = \vec{w}_1 \quad$ an.

3. Aufgabe

9 Punkte

Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 5 & 1 & \frac{5}{61} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

als lineare Abbildung auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^4$.

(i) Geben Sie die Determinante von B an.

(ii) Hat B reelle Eigenwerte? Falls ja, welche? Welche Dimensionen haben die zugehörigen Eigenräume?

(iii) Ist B diagonalisierbar? Falls ja, geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix an. Falls nein, begründen Sie, weshalb B nicht diagonalisierbar ist.

4. Aufgabe

10 Punkte

Geben Sie (ohne Begründung) an, ob die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ lineare Teilräume sind.

Teilmenge	ist Teilraum (Ja/Nein)
$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid xyz = 2\}$	
$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -z = 3x + \frac{y}{2}\}$	
$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$	
$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1\}$	
$\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z = 0\}$	