Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04

Liesen, Lutz, Seiler 13. Oktober 2004

Oktober – Klausur (Rechenteil)
Lösungen: Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

In welchem Semester haben Sie (falls erforderlich)
60 % der Hausaufgabenpunkte erreicht? ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

1	2	3	4	Σ_R		Σ_V		Σ_{ges}

1. Aufgabe

9 Punkte

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie den Rang der Matrix A.

   Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{2.Z:2.-2*1.;3.Z.:3.-1.;4.Z.:4.-1.}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{3.Z.:3.-2*2.;4.Z.:4.-2.}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{1.Z.:1.-2*2.}{\longleftrightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{:=\tilde{A}}$$

   Aus dieser normierten Zeilen-Stufenform lesen wir ab, dass der Rang von A zwei ist.

2. Bestimmen Sie den Kern der linearen Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$.

   Lösung:
   Aus der in der vorigen Teilaufgabe berechneten normierten Zeilen-Stufenform von A können wir den Kern der Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ablesen: Die Lösungsmenge des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$ hat einen freien Parameter. Wir führen daher den freien Parameter $x_3 = \lambda$ ein. Aus der 2. Zeile von $\tilde{A}$ erhalten wir $x_2 = -4\lambda$; aus der 1. Zeile von $\tilde{A}$ erhalten wir $x_1 = 9\lambda$. Der Kern der Abbildung ist also:

$$\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Aufgabe

7 Punkte

Für den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ seien die Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ gegeben durch

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix S der Koordinatentransformation von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$.

Mit anderen Worten: Finden Sie diejenige Matrix S, die $\vec{x}_{\mathcal{B}_2} = S\vec{x}_{\mathcal{B}_1}$ für jeden Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ erfüllt.

Lösung:
Für die Basiswechselmatrix S gilt gemäß kommutativem Diagramm:

$$S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$$

mit den Koordinatenabbildungen $K_{\mathcal{B}_1}$ und $K_{\mathcal{B}_2}$.
Da die Basis $\mathcal{B}_1$ die Standardbasis ist, ist die Koordinatenabbildung $K_{\mathcal{B}_1}$ die identische Abbildung (d.h. sie ist als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\vec{x} \mapsto E_2\vec{x}$ mit der 2×2-Einheitsmatrix E_2).
Für $K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$ als Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ liest man die entsprechende 2×2-Matrix aus der Basis direkt ab; in ihr stehen die Basisvektoren als Spalten:

$$K_{\mathcal{B}_2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Wie berechnen ihre Inverse:

$$K_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir für die Basiswechselmatrix:

$$S = K_{\mathcal{B}_2} \circ K_{\mathcal{B}_1}^{-1} = K_{\mathcal{B}_2} \circ E_2 = K_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Aufgabe

12 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von A und bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

   Lösung:
   Für das charakteristische Polynom von A gilt:

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda E_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} (2-\lambda) & 2 & 1 \\ 0 & (2-\lambda) & 0 \\ -1 & 5 & (-\lambda) \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(-\lambda) + 1] \\ &= (2-\lambda) \cdot [\lambda^2 - 2\lambda + 1] \\ &= (2-\lambda) \cdot (\lambda - 1)^2 \end{aligned}$$

   Da die Eigenwerte von A die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A sind, lesen wir für sie aus der letzten Gleichung ab:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 2 \quad \text{(algebraische Vielfachheit: 1)} \\ \lambda_2 &= 1 \quad \text{(algebraische Vielfachheit: 2)} \end{aligned}$$

2. Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert den zugehörigen Eigenraum.

Lösung:
Der Eigenraum zu einem Eigenwert λ ist der Kern von $A - \lambda E_3$. Wir lösen also das entsprechende homogene lineare Gleichungssystem.

$\lambda = 2:$
Wir müssen $(A - 2E_3)\vec{x} = \vec{0}$ lösen.

$$A - 2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Darauf wenden wir den Gaußalgorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{3.Z.:-3.;\text{Zeilen vertauschen}} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xleftrightarrow{1.Z.:1.+5/2*2.;2.Z.:1/2*2.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus lesen wir sofort für den Eigenraum ab:

$$\text{Eigenraum}(A, 2) = \text{span}\{\begin{pmatrix} -9/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Dieser Eigenraum hat Dimension 1 (geometrische Vielfachheit: 1).

$\lambda = 1:$
Wir müssen $(A - 1E_3)\vec{x} = \vec{0}$ lösen. Es gilt:

$$A - 1E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Darauf wenden wir den Gaußalgorithmus an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow{3.:1.+3.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xleftrightarrow{3.:3.-7*2.;1.:1.-2*2.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hieraus lesen wir sofort für den Eigenraum ab:

$$\text{Eigenraum}(A, -1) = \text{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

Dieser Eigenraum hat Dimension 1 (geometrische Vielfachheit: 1).

3. Falls A diagonalisierbar ist, geben Sie eine zugehörige Diagonalmatrix an. Falls A nicht diagonalisierbar ist, begründen Sie, wieso die Matrix A nicht diagonalisierbar ist.

   Lösung:
   In a) haben wir die Eigenwerte und ihre algebraischen Vielfachheiten bestimmt. In b) haben wir die zugehörigen Eigenräume bestimmt und ihre Dimensionen abgelesen. Die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten stimmen nicht überein. Daher ist A nicht diagonalisierbar.

4. Aufgabe

12 Punkte

Betrachten Sie die lineare inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4x(t) = \cos(t) \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

1. Bestimmen Sie mit dem Exponentialansatz die Lösungsgesamtheit der zu (1) gehörenden **homogene** Differentialgleichung.

   Lösung:
   Die zu (1) gehörende homogene Differentialgleichung lautet:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4x(t) = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

Wir machen den Exponentialansatz für eine Lösung der homogenen DGL:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Nun berechnen wir die Ableitungen:

$$\frac{dx}{dt}(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad \frac{d^2x}{dt^2}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Nun setzen wir den Ansatz in die homogene DGL (2) ein:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2x}{dt^2}(t) + 4x(t) = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) && (3)\\
\iff \ & \lambda^2 e^{\lambda t} + 4e^{\lambda t} = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) && (4)\\
\iff \ & e^{\lambda t}(\lambda^2 + 4) = 0 \qquad (\text{für alle } t \in \mathbb{R}) && (5)\\
\iff \ & \lambda^2 + 4 = 0 && (6)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist die *charakteristische Gleichung*. Ihre Lösungen sind:

$$\lambda_1 = 2i, \qquad \lambda_2 = -2i$$

Da wir zwei konjugiert komplexe Nullstellen gefunden haben, erhalten wir zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen DGL (2) als Real- und Imgaginärteil:

$$x_1(t) = \operatorname{Re} e^{2it} = \cos(2t), \qquad x_2(t) = \operatorname{Im} e^{2it} = \sin(2t)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist der Span von ihnen:

$$x_h(t) = \mu_1\, x_1(t) + \mu_2\, x_2(t) = \mu_1\, \cos(2t) + \mu_2\, \sin(2t), \qquad (\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R})$$

2. Zeigen Sie, dass durch $x_p(t) = \frac{1}{3}\cos(t)$ eine Lösung der **inhomogenen** Differentialgleichung (1) gegeben ist.

   Lösung:
   Wir berechnen die Ableitungen von x_p:

   $$\frac{dx_p}{dt}(t) = -\frac{1}{3}\sin(t), \quad \frac{d^2x_p}{dt^2}(t) = -\frac{1}{3}\cos(t)$$

   Wir setzen dies in die DGL ein:

   $$\frac{d^2x_p}{dt^2}(t) + 4x_p(t) = -\frac{1}{3}\cos(t) + \frac{4}{3}\cos(t) = \cos(t)$$

   Daraus lesen wir ab, dass x_p tatsächlich die inhomogene DGL (1) erfüllt.

3. Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der **inhomogenen** Differentialgleichung (1).

   Lösung:
   Die Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL (1) ist die Summe aus der Lösungsgesamtheit der homogenen DGL und *einer* Lösung der inhomogenen DGL. Die allgemeine Lösung der homogenen DGL haben wir in a) bestimmt. In b) haben wir gezeigt, dass x_p *eine* Lösung der inhomogenen DGL ist. Damit erhalten wir als Lösungsgesamtheit der inhomogenen DGL:

   $$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \mu_1 \cos(2t) + \mu_2 \sin(2t) + \frac{1}{4}\cos(t), \qquad (\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}) \tag{7}$$