# Technische Universität Berlin

**Fakultät II – Institut für Mathematik** SS 04

**Liesen, Lutz, Seiler** 13. Oktober 2004


## Oktober – Klausur (Verständnisteil)
## Lineare Algebra für Ingenieure

Name: ............................... Vorname: ...............................

Matr.–Nr.: ........................... Studiengang: ...........................

---

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

---

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

---

| 1 | 2 | 3 | 4 | $\Sigma_V$ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| | | | | |

## 1. Aufgabe

11 Punkte

Es sei folgende Matrix mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Für welche Werte des Parameters $a$ ist die Matrix $A$ invertierbar?

2. Sei $a = 1$.
   Welche Dimension hat der Kern der linearen Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ?

3. Sei $a = 1$.
   Geben Sie die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}_i$ für die Vektoren
   $$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{an.}$$

## 2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

1. Bilden die Vektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$?

2. Sei $M$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ und $\vec{w}_3$, also
   $$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie $M^{-1}$ an.

## 3. Aufgabe

12 Punkte

In dieser Aufgabe bezeichne $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ den Raum aller Polynome vom Maximalgrad 2. Die folgendermaßen definierte Abbildung $F$ ist linear:

$F : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit

$$F(ax^2 + bx + c) = ax^2 - bx - c.$$

1. Wählen Sie die Eigenschaften aus (ohne Begründung), die zur Definition einer linearen Abbildung gehören:

   Für alle $p, q \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

   | **Eigenschaft** | **gehört zur Linearität** |
   |---|---|
   | $F(p+q) = p + F(q)$ | |
   | $F(p+q) = F(p) + F(q)$ | |
   | $F(p \cdot q) = F(p) \cdot F(q)$ | |
   | $F(\lambda \cdot q) = F(\lambda) \cdot F(q)$ | |
   | $F(\lambda \cdot q) = \lambda \cdot F(q)$ | |

   Überprüfen Sie diese von Ihnen ausgewählten Eigenschaften für $F$.

2. Die Polynome $p_1 = x^2 + 1$, $p_2 = x^2 - 1$, $p_3 = x$ bilden eine Basis des Raums $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ aller Polynome vom Maximalgrad 2. Geben Sie die darstellende Matrix von $F$ bezüglich der Basis $p_1$, $p_2$, $p_3$ an.

## 4. Aufgabe

7 Punkte

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Es sei $\det(A) = 0$.
Geben Sie (ohne Begründung) an, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

| **Aussage** | **wahr/falsch** |
|---|---|
| Die Matrix $A$ ist invertierbar. | |
| Der Rang von $A$ ist gleich $n$. | |
| Es gibt mindestens einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, für den das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ nicht lösbar ist. | |
| Ein Eigenwert von $A$ ist $\lambda = 0$. | |
| Die Spaltenvektoren der Matrix $A$ sind linear abhängig. | |
| $\det(A^T) = 0$. | |
| Es existiert eine Matrix $B$ so, dass $\det(A \cdot B) = 1$. | |

*Jede richtige Antwort wird mit einem Punkt bewertet, jede falsche Antwort führt*