Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 04

Liesen, Lutz, Seiler 13. Oktober 2004

Oktober – Klausur (Verständnisteil)
Lösungen: Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 32 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 10 von 40 Punkten erreicht werden.

1	2	3	4	Σ_V

1. Aufgabe

11 Punkte

Es sei folgende Matrix mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Für welche Werte des Parameters a ist die Matrix A invertierbar?

   Lösung:
   Für $a = 1$ sind die 1. und 3. Zeile von A gleich, also sind dann die Zeilen von A linear abhängig, so dass dann A nicht invertierbar ist. Umgekehrt sind für $a \neq 1$ die 1. und 3. Zeile linear unabhängig. Da nur die 2. Zeile in der 2. Spalte einen Eintrag ungleich Null enthält, sind dann alle Zeilen von A linear unabhängig, also ist dann A invertierbar. Insgesamt ist also A für $a \neq 1$ invertierbar.

2. Sei $a = 1$.
   Welche Dimension hat der Kern der linearen Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$?

   Lösung:
   Für $a = 1$ erkennt man sofort, dass $\operatorname{rang}(A) = 2$ gilt. Da $\operatorname{rang}(A)$ die Dimension des Bildes der Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ist und die Dimension des Definitionsbereiches dieser Abbildung 3 ist, folgt nach dem Dimensionssatz, dass der Kern dieser Abbildung Dimension 1 hat. (Der Kern von A wird für $a = 1$ in c) direkt berechnet.)

3. Sei $a = 1$.
   Geben Sie die Lösungsmengen der linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}_i$ für die Vektoren

   $$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{an.}$$

   Lösung:
   Die Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{b}_1$ zu bestimmen, bedeutet den Kern von A zu bestimmen. Ein einziger Schritt im Gauß-Algorithmus führt bereits auf die normierte Zeilen-Stufenform von A:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{3.Z.:3.-1.}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Hieraus liest man sofort für die Lösungsmenge ab:

   $$\mathbb{L} = \operatorname{Kern}(A) = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}$$

   Das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}_2$ ist nicht lösbar, da seine erste Zeile, $x_1 + x_3 = 1$ und seine dritte Zeile, $x_1 + x_3 = 0$, im Widerspruch zu einander stehen. Die Lösungsmenge ist also:

2. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \; \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

1. Bilden die Vektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$?

   Lösung:
   Wir zeigen zunächst, dass $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ ein Orthonormalsystem bilden:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle &= 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1 \\
\langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle &= 0 \\
\langle \vec{w}_1, \vec{w}_3 \rangle &= -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 0 \\
\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle &= 1 \\
\langle \vec{w}_2, \vec{w}_3 \rangle &= 0 \\
\langle \vec{w}_3, \vec{w}_3 \rangle &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1
\end{aligned}$$

   Damit bilden $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$, $\vec{w}_3$ ein Orthonormalsystem, also sind sie linear unabhängig, und als Elemente des $\mathbb{R}^3$ spannen diese drei Vektoren damit auch den $\mathbb{R}^3$ auf. Insgesamt bilden $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3$ also eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$.

2. Sei M die Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ und $\vec{w}_3$, also

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

   Geben Sie M^{-1} an.

   Lösung:
   Nach a) ist M eine Orthogonalmatrix. Daher gilt

$$M^{-1} = M^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe

12 Punkte

In dieser Aufgabe bezeichne $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ den Raum aller Polynome vom Maximalgrad 2. Die folgendermaßen definierte Abbildung F ist linear:

$F : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit

$$F(ax^2 + bx + c) = ax^2 - bx - c.$$

1. Wählen Sie die Eigenschaften aus (ohne Begründung), die zur Definition

Eigenschaft	gehört zur Linearität
$F(p+q) = p + F(q)$	nein
$F(p+q) = F(p) + F(q)$	ja
$F(p \cdot q) = F(p) \cdot F(q)$	nein
$F(\lambda \cdot q) = F(\lambda) \cdot F(q)$	nein
$F(\lambda \cdot q) = \lambda \cdot F(q)$	ja

Überprüfen Sie diese von Ihnen ausgewählten Eigenschaften für F.

Lösung:
Mit $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ und $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F(p+q) &= F(a_1x^2 + b_1x + c_1 + a_2x^2 + b_2x + c_2) \\
&= F((a_1+a_2)x^2 + (b_1+b_2)x + (c_1+c_2)) \\
&= (a_1+a_2)x^2 - (b_1+b_2)x - (c_1+c_2) \\
&= (a_1x^2 - b_1x - c_1) + (a_2x^2 - b_2x - c_2) \\
&= F(a_1x^2 + b_1x + c_1) + F(a_2x^2 + b_2x + c_2) \\
&= F(p) + F(q)
\end{aligned}$$

Mit $p(x) = ax^2 + bx + c$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
F(\lambda \cdot p) &= F(\lambda \cdot (ax^2 + bx + c)) \\
&= F((\lambda \cdot a)x^2 + (\lambda \cdot b)x + (\lambda \cdot c)) \\
&= (\lambda \cdot a)x^2 - (\lambda \cdot b)x - (\lambda \cdot c) \\
&= \lambda \cdot (ax^2 - bx - c) \\
&= \lambda \cdot F(p)
\end{aligned}$$

Damit sind die ausgewählten Eigenschaften für F gezeigt (und damit ist die Linearität von F gezeigt).

2. Die Polynome $\quad p_1 = x^2 + 1, \quad p_2 = x^2 - 1, \quad p_3 = x$
bilden eine Basis des Raums $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ aller Polynome vom Maximalgrad 2. Geben Sie die darstellende Matrix von F bezüglich der Basis p_1, p_2, p_3 an.

Lösung:
Es gilt:

$$\begin{aligned}
F(p_1) = x^2 - 1 = p_2 = 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\
F(p_2) = x^2 + 1 = p_1 = 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 + 0 \cdot p_3 \\
F(p_3) = -x = -p_3 = 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 - 1 \cdot P_3
\end{aligned}$$

Daraus lesen wir für die darstellende Matrix von F bzgl. der Basis p_1, p_2, p_3 ab:

$$M_F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe

7 Punkte

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Es sei $\det(A) = 0$.
Geben Sie (ohne Begründung) an, welche der folgenden Aussagen wahr sind.

Aussage	**wahr/falsch**
Die Matrix A ist invertierbar.	falsch
Der Rang von A ist gleich n.	falsch
Es gibt mindestens einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, für den das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ nicht lösbar ist.	wahr
Ein Eigenwert von A ist $\lambda = 0$.	wahr
Die Spaltenvektoren der Matrix A sind linear abhängig.	wahr
$\det(A^T) = 0$.	wahr
Es existiert eine Matrix B so, dass $\det(A \cdot B) = 1$.	falsch

Jede richtige Antwort wird mit einem Punkt bewertet, jede falsche Antwort führt zum Abzug von einem Punkt, wobei jedoch die Aufgabe insgesamt mit mindestens 0 Punkten bewertet wird.