Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik SS 05
Mehrmann, Nabben, Seiler 20. Juli 2005

Juli – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4-Blatt mit Notizen sind keine Hilfsmittel zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

1. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{x} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 3x_4 \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 + 7x_4 \end{bmatrix}.$$

(a) Geben Sie die darstellende Matrix von L bezüglich der Standardbasis an.

(b) Bestimmen Sie die vollständige Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$L\vec{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 42 \\ -52 \end{bmatrix}.$$

(c) Geben Sie den Kern von L an.

(d) Bestimmen Sie eine Basis des Bildes von L.

2. Aufgabe

14 Punkte

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von A.

(b) Durch $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ wird eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^n$ nach $\mathbb{C}^n$ definiert.

Berechnen Sie alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren von A. Geben Sie für alle Eigenwerte die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten an.

3. Aufgabe

10 Punkte

Gegeben sei die Matrix $B = \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 14 & -12 \end{bmatrix}$. Die Matrix hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -5$ und die Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(a) Diagonalisieren Sie die Matrix B, d.h. geben Sie eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix S an, so dass $B = SDS^{-1}$ gilt.

(b) Berechnen Sie S^{-1}.

(c) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = B\vec{y}(t),\ t > 0, \qquad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

4. Aufgabe

6 Punkte

Gegeben seien die Matrizen $T_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ und $T_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie $T_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $T_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Zeichnen Sie die vier Vektoren $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, T_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ in einer Skizze.

(b) Beschreiben Sie, was die Abbildung $\vec{x} \mapsto T_1\vec{x}$ geometrisch bewirkt.

(c) Überprüfen Sie, ob die Matrix T_2 orthogonal ist.