TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 05
Fakultät II - Mathematik
V. Mehrmann/R. Nabben/R. Seiler

Lineare Algebra für Ingenieure

Lösungen zur Juli-Klausur

Stand: 22. Juli 2005

Verständnisteil

1. Aufgabe (14 Punkte)

(a) Die Dimension des Bildes von A ist 2. **(1)**

Nach dem Dimensionssatz berechnet sich die Dimension des Kerns zu $= 4 - 2 = 2$. **(1)**

(b) $\text{Rang}(A) = \text{Dim Bild}(A) = 2$. **(1)**

(c) Die lineare Abbildung $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ ist

- nicht injektiv, weil $\text{Kern}(A) \neq \{0\}$ bzw. $\text{Dim Kern}(A) > 0$. **(2)**
- nicht surjektiv, weil $\text{Dim Bild}(A) = 2 < 4 = \text{Dim Bildraum}$. **(2)**
- nicht bijektiv, weil nicht injektiv und nicht surjektiv. **(2)**

(d) Der Vektor $\vec{u}$ ist die Summe der beiden angegebenen Basisvektoren des Bildes von A, also gilt $\vec{u} \in \text{Bild}(A)$. Damit ist das Gleichungssytem $A\vec{x} = \vec{u}$ lösbar. **(2)**

Der Kern besteht nicht nur aus dem Nullvektor, also hat das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{u}$ unendlich viele Lösungen. **(2)**

(e) Die Matrix A hat nicht vollen Rang, also ist ihre Determinante Null. **(1)**

2. Aufgabe (8 Punkte)

(a) U ist kein Teilraum von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ **(1 Punkt)**, weil:

das Nullpolynom nicht in U enthalten ist. **(1 Punkt)**

(Alternativ 1: Seien $p, q \in U$. Dann ist $(p+q)'(0) = 1 + 1 \neq 1$. Daraus folgt $p + q \notin U$. **(1 Punkt)**)

(Alternativ 2: Seien $p \in U, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 1$. Dann ist $(\lambda p)'(0) = \lambda \cdot p'(0) = \lambda \cdot 1 \neq 1$. Daraus folgt $\lambda p \notin U$. **(1 Punkt)**)

(b) U ist ein Teilraum von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. **(1 Punkt)**

Beweis:

- Es gilt $U \subset \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. **(1 Punkt)**
- (Abgeschlossen unter Addition): Seien $p, q \in U$. Dann gelten $p(1) = 0$, $q(1) = 0$. Die Summe evaluiert an der Stelle 1
$$(p + q)(1) = p(1) + q(1) = 0 + 0 = 0$$
ist gleich Null, und so ist $p + q$ wiederum in U. **(1 Punkt)**
- (Abgeschlossen unter Skalarmultiplikation): Seien $p \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Das Produkt evaluiert an der Stelle 1
$$(\lambda p)(1) = \lambda \cdot p(1) = \lambda \cdot 0 = 0$$
ist auch gleich Null. Daraus folgt $\lambda p \in U$. **(1 Punkt)**

(c) U ist kein Teilraum von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ **(1 Punkt)**, weil:
$U \not\subset \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$. **(1 Punkt)**
(Alternativ: Wähle beispielsweise $p = x^2, q = x^2, r = 1, s = 1$ (alle sind Polynomen in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$). Man kann die Summe $pq + rs = x^4 + 1 = (x^2 + i)(x^2 - i)$ nicht als ein Produkt zwei Elementen aus $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ darstellen. U ist nicht unter Addition abgeschlossen. **(1 Punkt)**)

3. Aufgabe (11 Punkte)

(a) Ja **(1 Punkt)**

(b) $\det A = 0$ **(1 Punkt)**

(c) Nein **(1 Punkt)**

(d) Nein **(1 Punkt)**

(e) Dim. Kern $A \geq 1$ **(1 Punkt)**. A nicht invertierbar $\Rightarrow$ es gibt Nullzeile in NZSF $\Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ hat eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0}$. **(1 Punkt)**

(f) Ein EW ist Null **(1 Punkt)**, A nicht invertierbar $\Rightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ hat eine Lösung $\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow \exists \vec{x} \neq 0 : A\vec{x} = 0 \cdot \vec{x}$. **(2 Punkte)**

(g) Nein **(1 Punkt)** orth. Matrizen sind invertierbar **(1 Punkt)**.

4. Aufgabe (7 Punkte)

(a) $T = K_{\mathcal{B}_1} K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$ (mit oder ohne $\circ$) oder andere Begründung. **(1 Punkt)**

(b) T ist immer invertierbar **(1 Punkt)**, wenn $\mathcal{B}_i$ Basen sind.
T^{-1} ist die Koordinatentransformation von $\mathcal{B}_1$ nach $\mathcal{B}_2$. **(1 Punkt)**
$T^{-1} = K_{\mathcal{B}_2} K_{\mathcal{B}_1}^{-1}$ **(1 Punkt)**

(c) Man schreibt die Basisvektoren von $\mathcal{B}_1$ spaltenweise in T^{-1}. **(1 Punkt)**

(d) $L_{\mathcal{B}_2} = T^{-1} L_{\mathcal{B}_1} T$ oder $L_{\mathcal{B}_2} = K_{\mathcal{B}_2} \circ L \circ K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$ **(1 Punkt)**.

(e) $L_{\mathcal{B}_1} = T L_{\mathcal{B}_2} T^{-1}$ **(1 Punkt)**.