# Lösungen - Verständnisteil

**1. Aufgabe [13 Punkte]**
**Auf Antworten ohne Begründung gibt es KEINE Punkte!**

(a) dim (Kern $A$) $= 1 =$ 3-Rang($A$)
Alternative Begründung: Kern ausgerechnet mit einem freien Parameter.

(b) Keine Lösung, weil Rang $A <$ Rang $\left( A| \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Alternative Begründung: Die letzte Zeile von $A$ besteht nur aus Nullen. Dies führt zu der Gleichung $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$, welche nicht lösbar ist.

(c) Die Spalten von $A$ sind linear abhängig: Spalten Rang = Zeilen Rang = $2 < 3$.
Alternative Begründung: Es gibt eine nicht-triviale Lösung der Gleichung

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

nämlich z.B. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 6$.

(d) $A$ ist nicht invertierbar, weil (z.B.) dim Kern $A = 1 \neq 0$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ist ein Eigenvektor, weil $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(f) $A$ ist diagonalisierbar, denn es gibt drei verschiedene Eigenwerte (Diagonalelemente der oberen Dreiecksmatrix). Nach dem Theorem über paarweise verschiedene Eigenwerte ist $A$ diagonalisierbar.

**2. Aufgabe [10 Punkte]**
**Auf Antworten ohne Begründung gibt es KEINE Punkte!**

(a) $S$ ist injektiv: es wird nur der Nullvektor auf den Nullvektor gespiegelt, also Kern($A$) = $\{0\}$.
$S$ ist surjektiv: jeder Punkt $[x, y]^T$ ist Bild von $[x, -y]^T$.

(b) ist invertierbar: weil $S$ bijektiv ist.

(c) ist orthogonal: weil Spiegelungen Längen und Winkel erhalten.

(d) $\lambda_1 = 1$ mit Eigenraum $E_1 = \left\{ s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{C} \right\}$ und $\lambda_2 = -1$ mit Eigenraum $E_{-1} = \left\{ s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{C} \right\}$. Begründung: geometrisch oder nachrechnen.

**3. Aufgabe [9 Punkte]**

(a) $M_1$ ist kein Teilraum, denn der Nullvektor ist nicht in $M_1$ enthalten.
Alternative Begründung: Es wurde gezeigt, dass die Menge bzgl. der Addition oder Multiplikation mit Skalaren nicht abgeschlossen ist.

(b) $M_2$ ist ein Teilraum. Zuerst ist $M_2$ nicht leer, weil der Nullvektor in $M_2$ enthalten ist: $\langle \vec{0}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} \rangle = 0$.
Die Menge ist abgeschlossen bzgl. der Addition: Für $\vec{x}, \vec{y} \in M_2$ gilt

$$\langle \vec{x} + \vec{y}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} \rangle = \langle \vec{x}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} \rangle + \langle \vec{y}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Die Menge ist abgeschlossen bzgl. der Skalarmultiplikation: Für $\vec{x} \in M_2, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\langle \lambda\vec{x}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} \rangle = \lambda \langle \vec{x}, \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$.
Ein Punkt Abzug, wenn das Standardskalarprodukt benutzt wird!

(c) $M_3$ ist kein Teilraum. Der Nullvektor liegt zwar drin, die Menge ist aber nicht abgeschlossen bzgl. Addition und Skalarmultiplikation: Sei $\vec{x}$ ein Vektor mit $\|\vec{x}\| = 1$, dann ist weder $2\vec{x}$ noch $\vec{x} + \vec{x}$ in $M_3$, da deren Norm jeweils 2 ist.

**4. Aufgabe [8 Punkte]**

(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ + Begründung/Nachrechnen

(b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 9348 \end{bmatrix}$ + Begründung/Nachrechnen [oder eine andere symmetrische Matrix].

(c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ + Begründung/Nachrechnen

(d) $A = \begin{bmatrix} 0 & \pi \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ + Begründung/Nachrechnen

Andere Matrizen $A$ sind natürlich auch möglich.

# Rechnenteil

## 1. Aufgabe [11 Punkte]

(a) Erweiterte Koeffizientenmatrix in ZSF bringen:

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 & 22 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 12 \\ 3 & 11 & 11 & -11 & -34 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -3 & 3 & 22 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Lösungsmenge:

$$\mathcal{L} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{spezielle Lösung}} + \underbrace{s \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{K e r n}} \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

für das Kennzeichnen der speziellen Lösung, für den Kern.

(b) $\vec{b}$ liegt im Bild von $A$, da das Gleichungsssytem $A\vec{x} = \vec{b}$ lösbar ist.

(c) $A$ transponieren und in ZSF bringen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -1 & 11 \\ -3 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & -11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wiederum transponieren und nicht-triviale Spalten als Basisvektoren für Bild $A$ entnehmen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 10 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{Basis Bild } A : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$$



## 2. Aufgabe [9 Punkte]

(a) Die Transformation $S$ des Basiswechsels $\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2$ und $S^{-1}$ berechnen:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \end{array}\right]$$

$$S = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = S^{-1}$$

Die darstellende Matrix von $L$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2$ ist

$$\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ -21 & -13 \end{bmatrix} .$$

*Alternativ kann man die Koordinatenabbildungen und ihre Inversen berechnen:*

$$K_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, K_{\mathcal{B}_1}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, K_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, K_{\mathcal{B}_2}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

*Die gesuchte Matrix ist dann* $K_{\mathcal{B}_2} K_{\mathcal{B}_1}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} K_{\mathcal{B}_1} K_{\mathcal{B}_2}^{-1}$.

(b) Hier müssen wir den Umweg über $L_{\mathcal{B}_1}$ gehen:

$$\begin{aligned} L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= K_{\mathcal{B}_1}^{-1} L_{\mathcal{B}_1} K_{\mathcal{B}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**3. Aufgabe [10 Punkte]**

(a) Jede Basis von $\mathbb{R}_{\leq 1}$ enthält genau 2 Vektoren. Z.z., dass die Vektoren $4-3x, 2+x$ linear unabhängig sind. Seien $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Ausgehend von der Gleichung

$$\lambda_1(4-3x) + \lambda_2(2+x) = 0$$

bekommen wir nach Koeffizientenvergleich ein homogenes LGS:

$$\begin{aligned} 4\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ -3\lambda_1 + 1\lambda_2 &= 0 \end{aligned}$$

Nach Anwendung des Gauss-Algorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rr|r} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

bekommen wir die einzige Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Alternativ: Die Koeffizienten Matrix $A$ hat Determinante $\neq 0$, so dass Rang $A = 2$ ist; d.h. die betrachteten zwei Vektoren sind linear unabhängig und $\mathcal{B}$ ist eine Basis.

(b) Normierung des ersten Basisvektors: $\|4-3x\| = \sqrt{\langle 4-3x, 4-3x\rangle} = \sqrt{16+9} = 5$, $w_1 = \frac{1}{5}(4-3x)$.

Lot berechnen: $\ell_2 = 2+x - \langle 2+x, w_1\rangle w_1 = 2+x-1\cdot\frac{1}{5}(4-3x) = \frac{6}{5}+\frac{8}{5}x$.

Lot normieren: $\|\ell_2\| = \sqrt{\frac{36}{25}+\frac{64}{25}} = 2$, $w_2 = \frac{1}{5}(3+4x)$.

Orthonormalbasis $\left\{\frac{1}{5}(4-3x), \frac{1}{5}(3+4x)\right\}$.



**4. Aufgabe [5 Punkte]**
Aus der Definition eines Eigenwerts bzw. eines Eigenvektors gilt die Gleichung

$$\begin{bmatrix} -4 & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Wir erhalten die Gleichungen

$$\begin{array}{rcrcr} -4 & - & 3b & = & 2 \\ c & - & 3d & = & -6. \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $b = -2$.
Es bleibt $c, d$ zu bestimmen. Die Matrix $A$ ist nicht invertierbar wenn $0 = \det A = -4d - bc$. Mit $b = -2$ heisst dies $-4d + 2c = 0$ oder umformuliert $c = 2d$. Von der zweiten Gleichung von oben ist $2d - 3d = -6$ oder $d = 6$.
Lösung: $b = -2, c = 12, d = 6$

**5. Aufgabe [5 Punkte]**
Gesucht: $\vec{y}(t) = Se^{(t-t_0)D}S^{-1}\vec{y_0}$, wobei (nach einfachem Rechnen für $S^{-1}$)

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ S^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{y}(t_0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} + e^{3t} \\ e^{2t} + 2e^{3t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

*Alternative:*

$$\vec{y}(t_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

*dann ist*

$$\vec{y}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} + e^{3t} \\ e^{2t} + 2e^{3t} \end{bmatrix}$$