Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik WS 05/06
B. Jacob/J. Liesen/R. Nabben/R. Seiler/T. Stykel 22. Februar 2006

Februar – Klausur (Rechenteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Rechenaufgaben. Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	5	Σ

1. Aufgabe

11 Punkte

Gegeben sind die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 11 & 11 & -11 \end{bmatrix}$ und der Vektor $\vec{b} = \begin{bmatrix} 22 \\ 12 \\ -34 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$. Geben Sie eine spezielle Lösung und den Kern von A an.

(b) Liegt $\vec{b}$ im Bild von A?

(c) Berechnen Sie eine Basis von Bild(A), $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.

2. Aufgabe

9 Punkte

Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bzgl. der Basis $\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ sei durch $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von L bzgl. der Basis $\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) Berechnen Sie $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$.

3. Aufgabe

10 Punkte

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{B} := \{4 - 3x, 2 + x\}$ eine Basis des $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ ist.

(b) Für $p := p_0 + p_1 x, q := q_0 + q_1 x \in \mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ sei das Skalarprodukt im $\mathbb{R}_{\leq 1}[x]$ als $\langle p, q \rangle := p_0 q_0 + p_1 q_1$ definiert. Dessen assoziierte Norm ist durch $\|p\| := \sqrt{\langle p, p \rangle}$ gegeben. Berechnen Sie aus der Basis in Teil (a) eine Orthonormalbasis.

4. Aufgabe

5 Punkte

Bestimmen Sie Konstanten $b, c, d \in \mathbb{R}$, so dass die Matrix $C := \begin{bmatrix} -4 & b \\ c & d \end{bmatrix}$ nicht invertierbar ist, und so dass $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix C zu dem Eigenwert $\lambda = 2$ ist.

5. Aufgabe

5 Punkte

Sei $A \in \mathbb{C}^{2,2}$ eine Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ und mit den zugehörigen Eigenräumen

$$E_{\lambda_1} = \left\{ \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{C} \right\}, \quad E_{\lambda_2} = \left\{ \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mid \beta \in \mathbb{C} \right\}.$$

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t)$ mit $\vec{y}(t_0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ für $t_0 = 0$.