Rechenteil

1. Aufgabe [14 Punkte]

(a) Erweiterte Koeffizientenmatrix in ZSF bzw. NZSF bringen:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Lösungsmenge:

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid s \in \mathbb{K} \right\}$$

(b) $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)(4-\lambda)\lambda(\lambda-4) = -\lambda(2-\lambda)(4-\lambda)^2$

Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$ mit algebraischen Vielfachheiten 1,1 bzw. 2 .

(c) Die einfachste Antwort: Da A symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar.

Die von vielen bevorzugte Begründung:
Da $1 \leq$ geom.Vfh. $\leq$ alg.Vfh. gilt, haben die Eigenwerte λ_1 und λ_2 jeweils die geom. Vfh. 1.

Alternativ zu dieser Begründung kann man die Eigenräume zu λ_1 und λ_2 auch berechnen und deren Dimensionen ablesen (Ergebnisse s.u.).

Eigenraum zu $\lambda_3 = 4$:

$$A - \lambda_3 I_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$V_{\lambda_3} = Kern(A - \lambda_3 I_4) = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ oder Begründung 2 Nichtkopfvariablen liefert: Die geometrische Vielfachheit von λ_3 ist 2.

Da für jeden Eigenwert algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen, ist A diagonalisierbar.

Zur Alternative:

Eigenraum zu $\lambda_1 = 0:$

$$A - \lambda_1 I_4 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{(s.o.)}$$

$$V_{\lambda_1} = Kern(A - \lambda_1 I_4) = span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Eigenraum zu $\lambda_2 = 2:$

$$A - \lambda_1 I_4 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_{\lambda_2} = Kern(A - \lambda_2 I_4) = span \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

2. Aufgabe [10 Punkte]

(a) $K_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$

(b) $\vec{x}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(c) $L_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $L_{\mathcal{B}} = K_{\mathcal{B}}\, L_{\mathcal{S}}\, K_{\mathcal{B}}^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Alternative:

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Das liefert natürlich :-)

$$L_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Aufgabe [10 Punkte]

• Zeige zunächst lineare Unabhängigkeit:
Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

liefert das LGS

$$\begin{array}{rcrcrcrl} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = 0 \\ 2\lambda_1 & & & + & \lambda_3 & + & \lambda_4 & = 0 \\ & & 2\lambda_2 & + & \lambda_3 & - & \lambda_4 & = 0 \\ & & & & \lambda_3 & - & \lambda_4 & = 0 \end{array}$$

Da für die Koeffizientenmatrix

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$det(A) = -4 \neq 0$ gilt, hat das homogene LGS nur eine und zwar die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$, woraus die lineare Unabhängigkeit folgt.

Alternativ zur Betrachtung der Determinante kann man die Koeffizientenmatrix A auf ZSF oder NZSF bringen, um dann die Lösung abzulesen.

• Wegen $dim(\mathbb{R}^{2,2}) = 4$ besteht jede Basis des $\mathbb{R}^{2,2}$ aus vier Elementen . Somit bilden die vier linear unabhängigen Matrizen schon eine Basis des $\mathbb{R}^{2,2}$. für die Idee

Alternativ kann man auch nachrechnen, dass die Matrizen ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^{2,2}$ bilden:
Der Ansatz

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

liefert ein LGS mit der erweiterten Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 2 & 1 & -1 & c \\ 0 & 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right]$$

Aus (N)ZSF liest man die folgende Lösung ab:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = -a + b + c/2 - d/2 \\ &\lambda_2 = c/2 - d/2 \\ &\lambda_3 = a - b/2 - c/2 + d \\ &\lambda_4 = a - b/2 - c/2 \end{aligned}$$

Also kann man jede reelle 2×2-Matrix als Linearkombination der gegebenen Matrizen erzeugen.

4. Aufgabe [6 Punkte]
Aus $det(A) = c - b$ erhalten wir die Gleichung

$$c - b = 5.$$

Wegen $\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = a$ und $\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 4b + c$ erhalten wir aus der geforderten Orthogonalität die Gleichungen

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ 4b + c &= 0. \end{aligned}$$

Das liefert also $a = 0$ und für b und c ein LGS mit Koeffizientenmatrix

$$\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|r} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right],$$

d.h. $b = -1$, $c = 4$.