Technische Universität Berlin

Fakultät II – Institut für Mathematik WS 05/06

B. Jacob/J. Liesen/R. Nabben/R. Seiler/T. Stykel 12. April 2006

April – Klausur (Verständnisteil)
Lineare Algebra für Ingenieure

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Neben einem handbeschriebenen A4 Blatt mit Notizen sind keine weiteren Hilfsmittel zugelassen. Es sind **keine Taschenrechner** und **keine Handys** zugelassen!

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Dieser Teil der Klausur umfasst die Verständnisaufgaben, sie sollten ohne großen Rechenaufwand mit den Kenntnissen aus der Vorlesung lösbar sein. Geben Sie, wenn nichts anderes gesagt ist, immer eine **kurze Begründung** an.

Die Bearbeitungszeit beträgt **eine Stunde**.

Die Gesamtklausur ist mit 40 von 80 Punkten bestanden, wenn in jedem der beiden Teile der Klausur mindestens 12 von 40 Punkten erreicht werden.

Korrektur

1	2	3	4	Σ

Geben Sie bei Ihren Antworten immer eine kurze Begründung an!
Für Antworten ohne Begründung gibt es <u>keine</u> Punkte!

1. Aufgabe

14 Punkte

Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ eine Matrix, deren Spalten eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarproduktes bilden.

(a) Bestimmen Sie $A^T A$.

(b) Ist A invertierbar? Falls ja, geben Sie eine Inverse an.

(c) Bestimmen Sie $|\det(A)|$.

(d) Sind die Zeilen von A linear abhängig?

(e) Wie viele Lösungen hat das LGS $A\vec{x} = \vec{0}$?

(f) Berechnen Sie die Norm von $A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Aufgabe

11 Punkte

Sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ die lineare Abbildung, die durch $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = x^2 + 1$, $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = x$ und $L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = 0$ gegeben ist.

(a) Berechnen Sie $L\left(\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$.

(b) Ist L injektiv?

(c) Ist L surjektiv?

(d) Ist L invertierbar?

(e) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $L(\vec{z}) = x + 1$.

3. Aufgabe

8 Punkte

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit einer Norm $\|\cdot\|$. Entscheiden Sie bei jeder der folgenden Mengen, ob es sich um einen Teilraum des $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ handelt.

(a) $P_1 := \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] : \; p(1) = 0\}$

(b) $P_2 := \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] : \; \|p\| \geq 1\}$

(c) $P_3 := \{p \in \mathbb{R}_{\leq 2}[x] : \; \|p\| \geq -1\}$

4. Aufgabe

7 Punkte

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ mit den Eigenvektoren $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{d\vec{y}}{dt}(t) = A\vec{y}(t)$ mit $\vec{y}(t_0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ für $t_0 = 0$.